

Statik

Skriptum

BAU-/ ZIMMERMEISTERKURS

Vorbereitung zur Befähigungsprüfung

Thomas Klas - Emanuel Loisdidis - Hermann Vogel



Vorwort

Zur Ablegung der Befähigungsprüfung für das bewilligungspflichtige gebundene Baumeistergewerbe bzw. das Zimmermeistergewerbe sind umfangreiche Kenntnisse auf den Gebieten Mathematik/Darstellende Geometrie, Statik und Entwurfslehre u. a. erforderlich. Das Fachgebiet Statik umfasst die Baustatik einschließlich der Festigkeitslehre und die Bemessungsverfahren im Stahl-, Holz- und Stahlbetonbau.

Die Einteilung der Unterkapitel aus Statik und Festigkeitslehre ist an die Vortragsreihe gebunden, kann aber hie und da leicht davon abweichen. Dieses Skriptum soll nicht die eigene Mitschrift ersetzen, besonders weil Beispiele fehlen, die zum Verständnis einen nützlichen Beitrag leisten, sondern dem interessierten Leser eine Vertiefung und Verfestigung des erworbenen Wissens gewähren. Zu diesem Zweck wurde im Anhang eine Literaturliste angefertigt, die einen schnellen und leichten Zugang zu den einzelnen Problemstellungen ermöglicht.

Hochgestellte Fußnoten markieren die Zugehörigkeit und bilden gemeinsam mit dem Literaturverzeichnis ein sehr nützliches Nachschlagewerk.

Innsbruck, im September 2005

Dipl.-Ing. Emanuel Loisis

Inhaltsverzeichnis:

Allgemeines	5
I. Statik der festen bzw. starren Körper	15
I.1. Kraftsysteme	16
I.1.1 zentrales ebenes Kraftsystem	16
I.1.2 allgemeines ebenes Kraftsystem	18
I.2. Graphische Behandlung	21
I.3. Statisch bestimmte Träger	22
I.3.1 Arten der Auflagerung	22
I.3.2 Träger auf zwei Stützen	22
I.3.2.1 Bestimmung der Auflagerreaktionen	22
I.3.2.2 Die inneren Kräfte (Schnittkräfte)	23
I.3.3 Gerberträger (Gelenksträger)	24
I.3.4 Dreigelenkbogen	25
I.3.4.1 graphische Behandlung des Dreigelenksbogen	25
I.3.4.2 rechnerische Behandlung des Dreigelenksbogen	26
I.4 Fachwerke	27
I.4.1 graphische Behandlung	27
I.4.2 rechnerische Behandlung	28
I.5 Ermittlung statischer Bestimmtheit	31
I.6 Statische Berechnung	33
I.7 Statisch unbestimmte Systeme	34
I.7.1 Winkler	34
I.7.2 Clapeyron (Dreimomentengleichung)	34
I.7.3 CROSS, Iterationsverfahren	35
I.7.4 Kraftgrößenmethode	38

II. Festigkeitslehre	40
II.1. Einführung, Allgemeines	40
II.2. Elastizitätstheorie	41
II.3. Bemessungsverfahren	43
II.3.1 Geometrisch bedingte Größen	43
II.3.1.1 Schwerpunkt	43
II.3.1.2 Trägheitsmoment	43
II.3.1.3 Trägheitsradius	44
II.3.1.4 Polares Trägheitsmoment	45
II.3.1.5 Deviationsmoment (Zentrifugalmoment)	45
II.3.1.6 Widerstandsmoment	45
II.3.2 Spannungsnachweise	46
II.3.2.1 Normal- und Schubspannung	46
II.3.2.2 Einaxiale Biegespannung	46
II.3.2.3 Zweiaxiale Biegespannung	46
II.3.2.4 Einaxiale Biegespannung und Normalspannung	47
II.3.2.5 Zweiaxiale Biegespannung und Normalspannung	47
II.3.2.6 Kernfläche eines Querschnittes	47
II.3.2.7 Versagen der Zugzone	48
II.3.2.8 Schubspannung	48
II.3.3 Stabilitätsnachweis (Knickung)	49
II.3.3.1 Knicken	50
II.3.3.2 Biegeknicken	50
II.3.4 Gebrauchstauglichkeitsnachweis (Biegelinie)	51
II.3.5 Torsion	52
II.3.5.1 Stäbe mit Kreisquerschnitt	52
II.3.5.2 Rechtecksquerschnitt	52
II.3.5.3 Dünnwandige Walzprofile	52
II.3.5.4 Dünnwandige Hohlquerschnitte	52
II.3.5.4 Dünnwandige Kastenquerschnitte	52



Statik

Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte

Wozu dient sie?

- **Wirtschaftliche Bemessung von Tragwerken**
(wird immer wichtiger)
- **Bestimmung von Formänderungen**
(Kontrolle ob zulässige Werte überschritten werden)

Bauwerk

Für den Menschen zur Nutzung und zum Schutz

Besteht aus:

- Abdeckung (Haut, Fassade)
- Tragwerk
tragende Struktur, für die statische Berechnung am wichtigsten
- Ausbau
für die Lastaufstellung von Bedeutung, Komfort
- Boden (Gründung)
Wirkung des Bodens auf das Tragwerk!

Tragwerk

Für die Ableitung der Kräfte und Lasten

kann eben oder räumlich ausgebildet sein.

- **Stabwerk**
Stäbe sind biegesteif miteinander verbunden
- **Fachwerk**
Stäbe in den Knoten gelenkig miteinander verbunden
- **Flächentragwerk**
Scheiben, Platten und Schalen; aufwendig bei Berechnung

Baustatik

Statik der Baukonstruktionen

unterteilt sich in

- **Stabstatik**
für uns am bedeutendsten
- **Flächenstatik**
Berechnung meist mittels EDV, FE - Programme
- **Statik auf Körper**
Kontinuumsmechanik, z.B. bei Flüssigkeiten $\Rightarrow$ räumlicher Spannungszustand (erheblicher Mehraufwand)

Ihrer Handhabung nach unterscheidet man:

- **Graphische Statik**
Seileckkonstruktionen, Stützlinienermittlung bei Bögen, usw.
- **Rechnerische Statik**
 - Starrkörperstatik
ohne Berücksichtigung der elastischen Formänderung
 - Elastostatik
mit Berücksichtigung der elastischen Formänderung
- **Graphische und Rechnerische Verfahren**
- **Experimentelle Statik**
Modellversuche, Dehnungsmessungen, Spannungsoptik

Einwirkungen

Direkte Einwirkung (mechanisch)

Lasten:

- Massenkräfte
- Schwerkkräfte
ruhend und veränderlich
- Eigengewicht
- Nutzlast
- Verkehrslasten
- Schnee

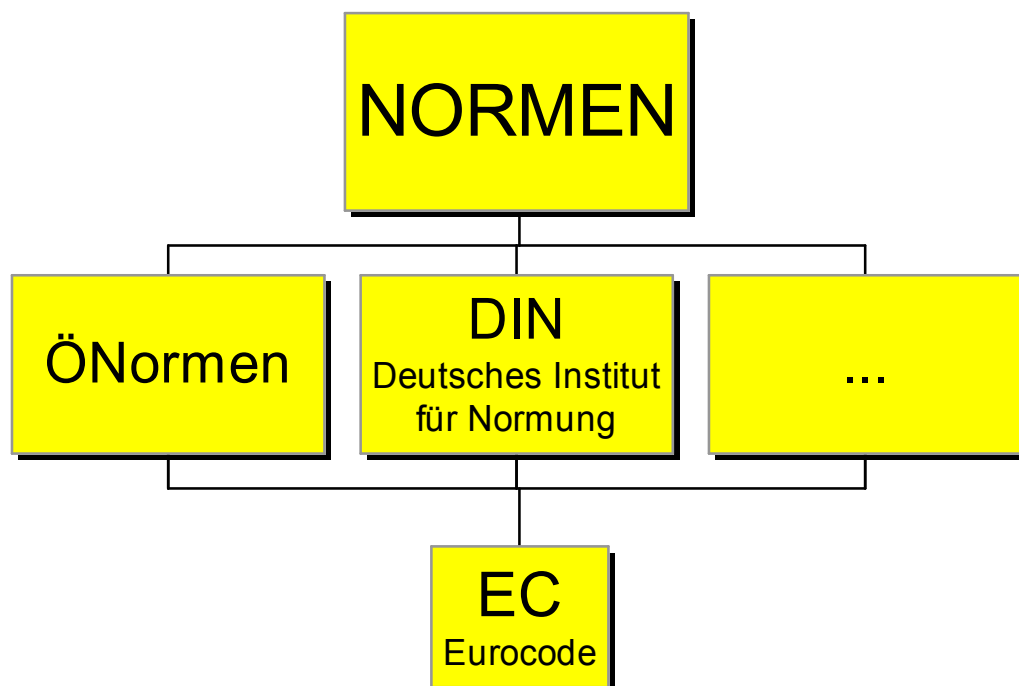
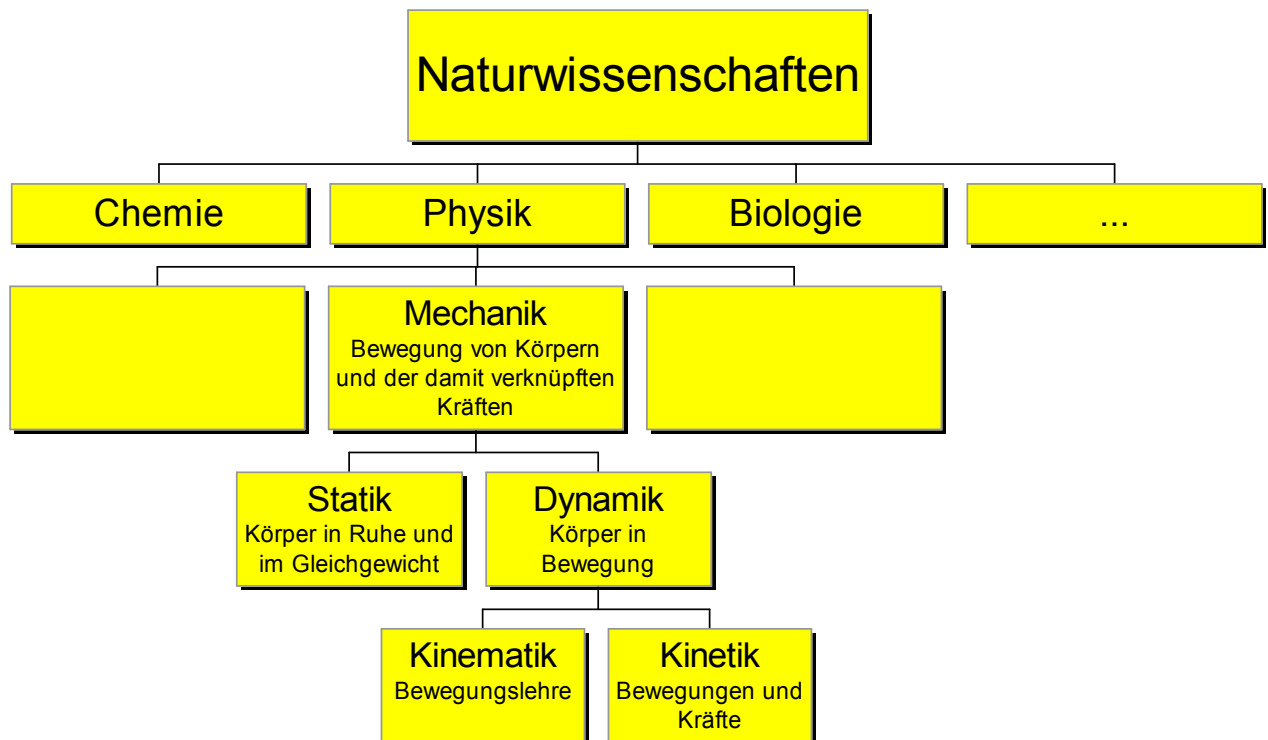
Kräfte:

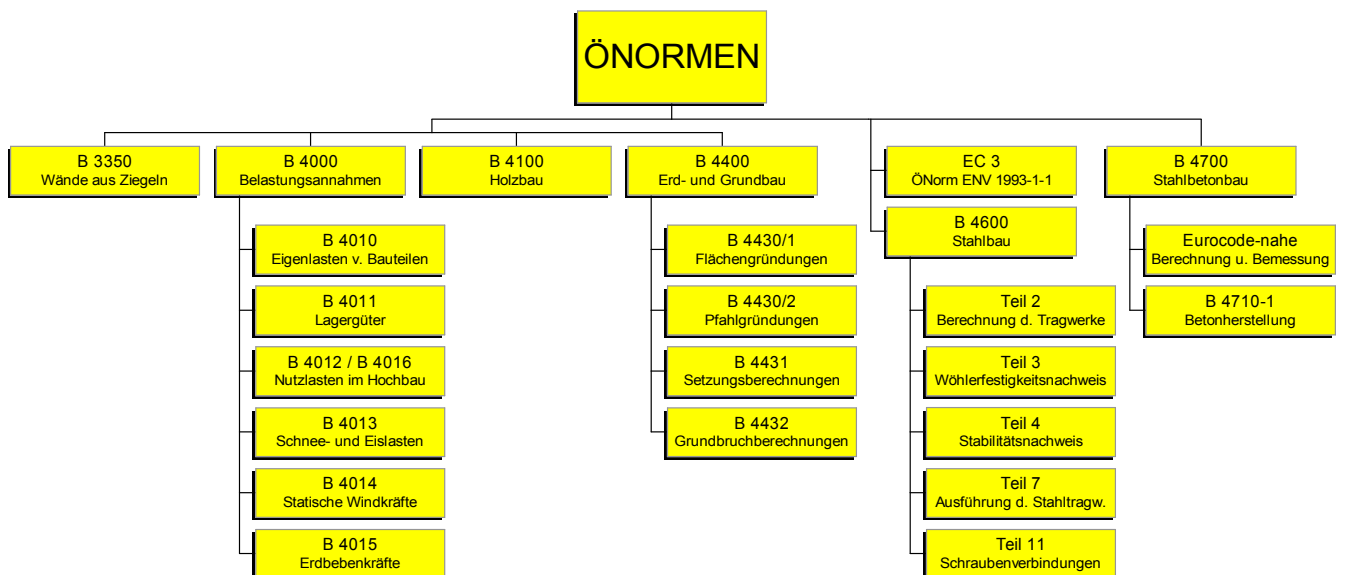
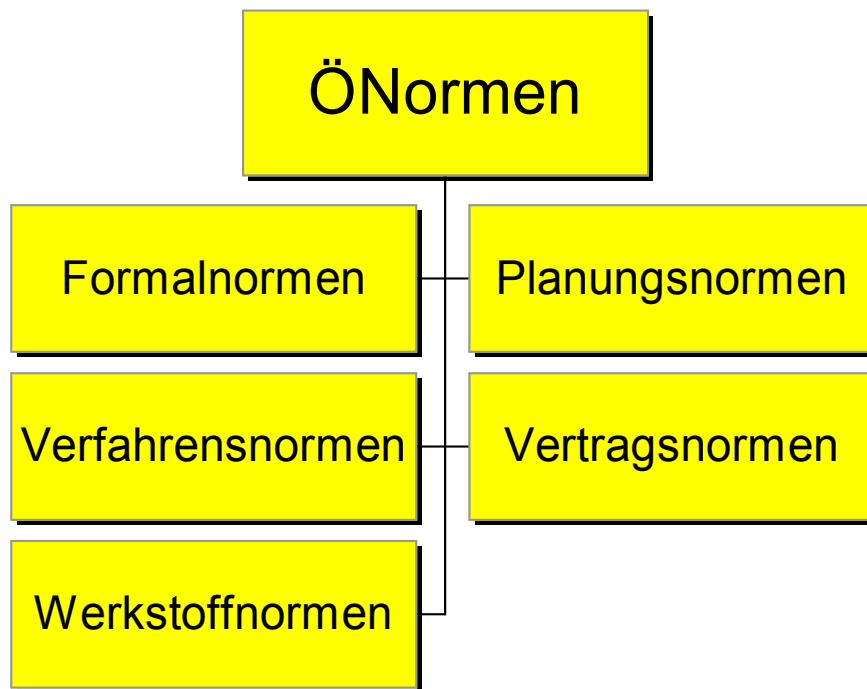
- Freie Kräfte
statisch und dynamisch
- Abspannkräfte
- Wind
- Anfahrkräfte
- Fliehkräfte
- Erdbeben

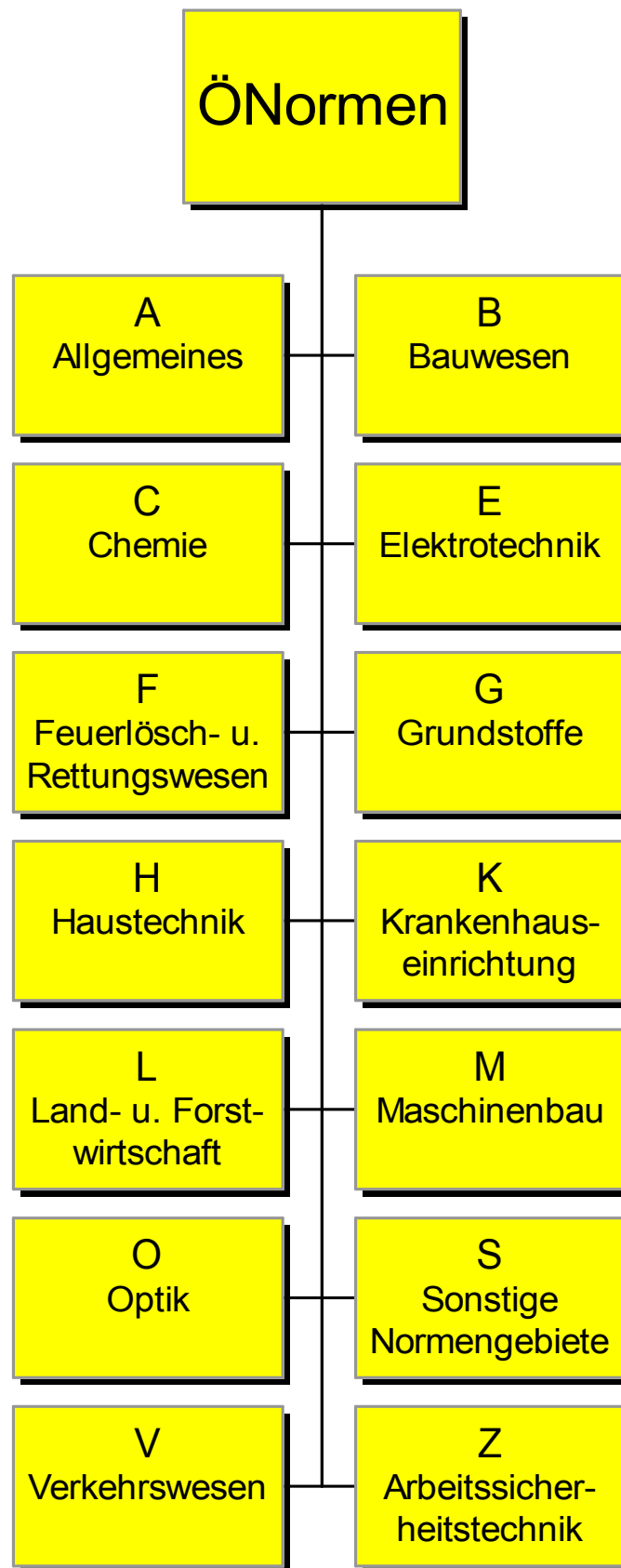
Indirekte Einwirkung (nicht mechanisch, geometrisch)

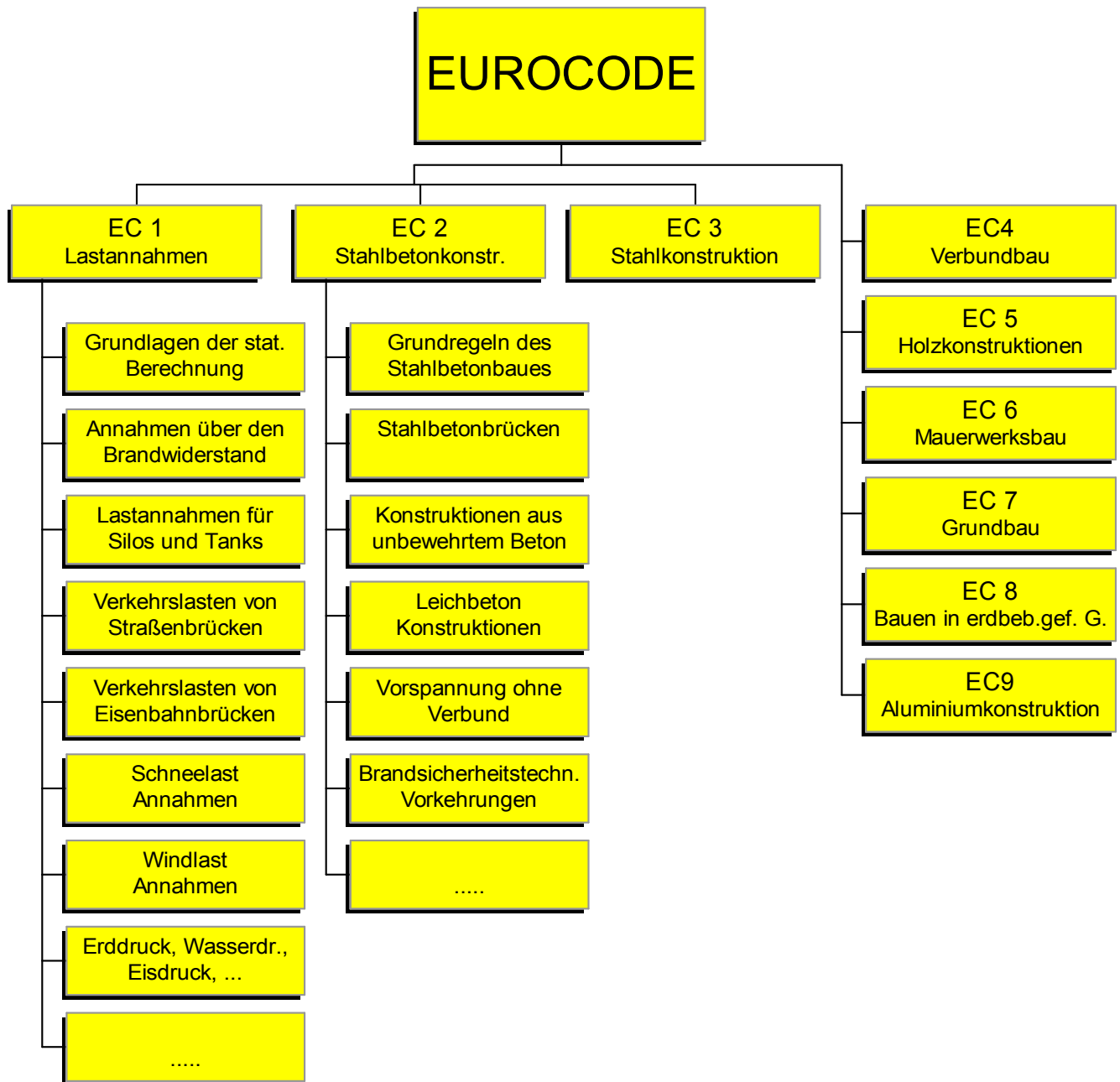
- Feuchte
- Temperatur
- Strahlung

Geschichtliche Entwicklung









Begriffe: Statik, Bauwerk, Tragwerk, usw. ¹

Geschichtliche Entwicklung ²

Normen ³

I. Statik der festen bzw. starren Körper

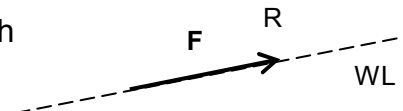
Grundgesetze (Newton'sche Axiome):

1. Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird den Zustand zu ändern.
2. Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der Kraft proportional, d. h. Kraft ist Masse mal Beschleunigung $F = m \cdot a$.
3. Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich. Dieses Reaktionsprinzip besagt, dass Kräfte immer paarweise auftreten (Aktion = Reaktion).

Die Kraft:

Sie ist eine vektorielle Größe und ist gegeben durch

- Betrag
- Richtungssinn
- Lage der Wirkungslinie



Eine Kraft, wie die *Schwerkraft* z.B., kann längs der Wirkungslinie beliebig verschoben werden. Es ist nur von Interesse zu wissen, wo die Kraft am Körper angreift. Dieser Punkt wird als Angriffspunkt bezeichnet. Die so genannte Einzelkraft ist nur eine Idealisierung von Volumskräften und flächenhaft verteilten Kräften. Diese Idealisierung stimmt aber bei kleinen Angriffsflächen gut mit der Wirklichkeit überein.

VEKTOR „gerichtete Größe“

SKALAR „nicht gerichtete Größe“, Zahl + Einheit (z.B. 1 kg oder 4 €)

Einheit der Kraft:

1 Newton (N)

1 N ist jene Kraft, die der Masse 1 kg die Beschleunigung 1 m/s^2 erteilt.

Gruppen von Kräften nennt man *KRAFTSYSTEME*.

Wir unterscheiden:

- a) ebene Kraftsysteme, (2-D)
- b) räumliche Kraftsysteme, (3-D)

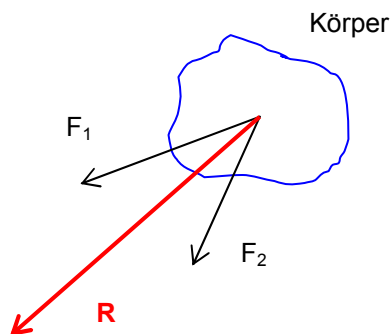
Haben alle Kräfte eines Systems ein und denselben Angriffspunkt (die Wirkungslinien sämtlicher Kräfte gehen durch einen Punkt), so sprechen wir von einem *zentralen Kraftsystem*.

Ist das nicht der Fall, so sagen wir es liegt ein *allgemeines Kraftsystem* vor.

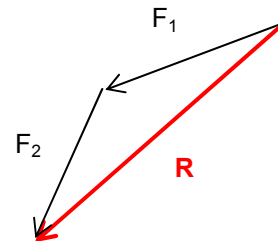
I.1. Kraftsysteme

I.1.1 zentrales ebenes Kraftsystem

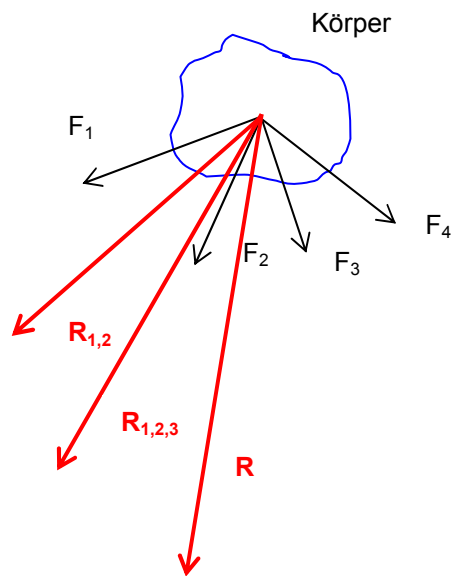
grafische Behandlung:



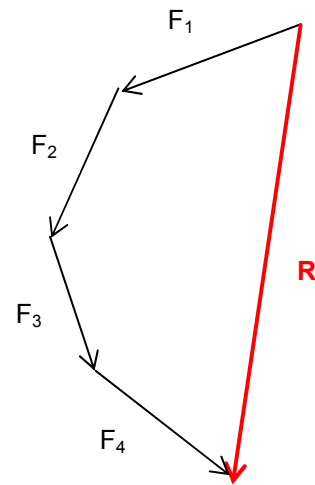
Lageplan
Kräfteparallelogramm



Kräfteplan
Krafteck



Lageplan
Kräfteparallelogramm



Kräfteplan
Krafteck

Bei der Reduktion eines zentralen ebenen Kraftsystems sind zwei Ergebnisse möglich.

1. Das Kraftsystem reduziert sich auf eine einzelne Kraft, das bedeutet das Krafteck ist offen.
2. Das Kraftsystem ist im Gleichgewicht, d.h. Krafteck ist geschlossen $R = 0$.

Drei Kräfte sind nur dann im Gleichgewicht, wenn sich ihre Wirkungslinien in einem Punkt schneiden.

rechnerische Behandlung:

Zerlegung von Kräften wird notwendig. Der Ursprung des Koordinatensystems wird im Schnittpunkt der Kräfte angenommen.

Ein zentrales ebenes Kraftsystem ist im Gleichgewicht wenn, $R = 0$, das ist dann der Fall, wenn sowohl R_y als auch R_z Null sind. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten daher

$$\sum F_{iy} = 0$$

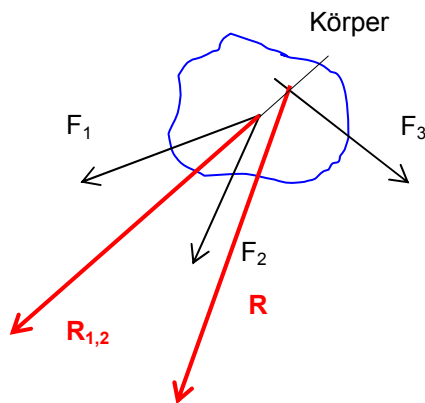
$$\sum F_{iz} = 0$$

I.1.2 allgemeines ebenes Kraftsystem

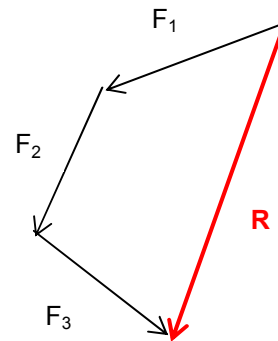
grafische Behandlung:

Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Resultierende eines solchen Kraftsystems zu ermitteln.

1. Mit Hilfe von Teilresultierenden, diese Methode ist aber nur begrenzt möglich

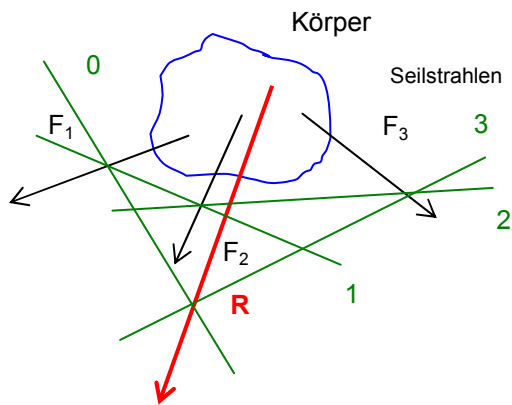


Lageplan
Kräfteparallelogramm

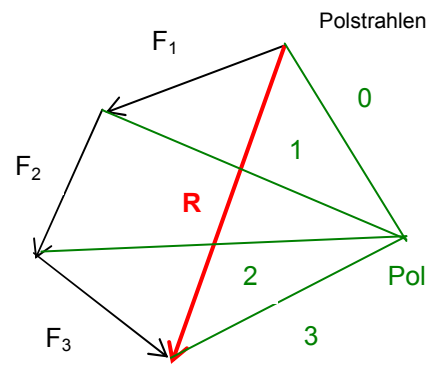


Kräfteplan
Krafteck

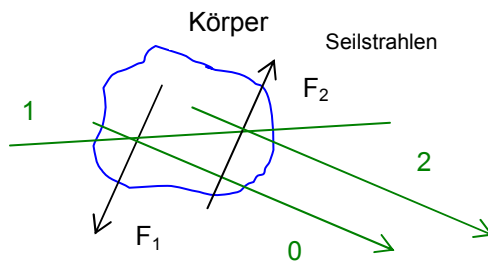
2. Mit Hilfe des Seilecks, dazu zeichnet man für die Kräfte F_i das Krafteck aus dem sich bereits Größe und Richtung von R ergeben. Nun wählt man einen beliebigen Punkt O , welcher *Pol* des Kraftecks genannt wird und zieht von diesen die Verbindungslinien zu sämtlichen Eckpunkten des Kraftecks. Diese Verbindungslinien werden *Polstrahlen* genannt. Nun zeichnet man im Lageplan die Parallelen zu den Polstrahlen, welche *Seilstrahlen* heißen nach folgender Regel. Wenn zwei Polstrahlen im Kräfteplan (Krafteck) eine Kraft einschließen, dann schneiden sich die Parallelen im Lageplan auf dieser Kraft. Der Schnittpunkt des ersten und letzten Seilstrahles ist ein Punkt der Wirkungslinie von R . Der Polygonzug der Seilstrahlen im Lageplan der dabei entsteht wird *Seileck*⁴ genannt.



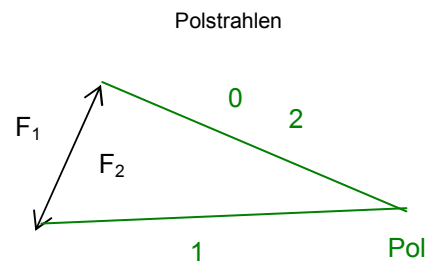
Lageplan
Seileck – „offen“



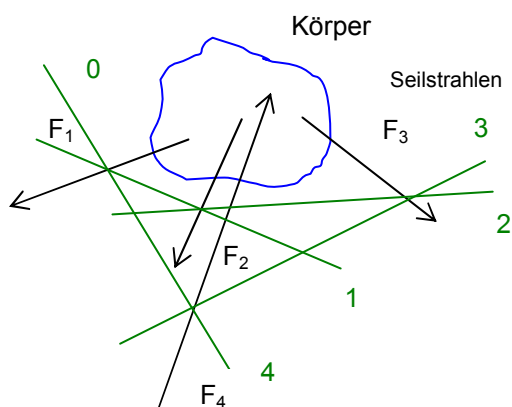
Kräfteplan
Krafteck – „offen“



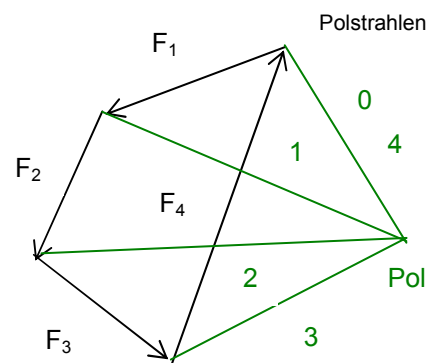
Lageplan
Seileck – „offen“



Kräfteplan
Krafteck – „geschlossen“



Lageplan
Seileck – „geschlossen“



Kräfteplan
Krafteck – „geschlossen“

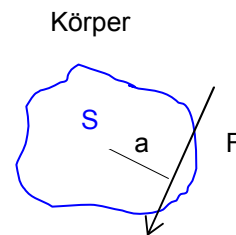
Die Reduktion eines allgemeinen ebenen Kraftsystems kann zu folgenden Ergebnissen führen:

1. Krafteck offen und Seileck offen ergibt eine Resultierende (Einzelkraft)
2. Krafteck geschlossen und Seileck offen ergibt ein Kräftepaar (Drehmoment)
3. Krafteck geschlossen und Seileck geschlossen bedeutet, es herrscht Gleichgewicht

Eine wichtige Anwendung findet das Seileck bei der graphischen Bestimmung der Auflagerreaktionen und des Momentenverlaufes an einem Biegeträger.⁵

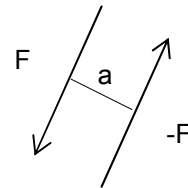
Moment einer Kraft:

$$M = F \cdot a \quad [\text{Nm}]$$



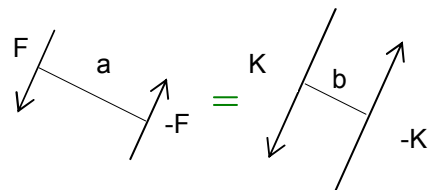
Moment eines Kräftepaares:

$$M = F \cdot a \quad [\text{Nm}]$$



Kräftepaare die das gleiche Moment haben sind gleichwertig, d.h. das Produkt aus Kraft mal Abstand bleibt gleich.

$$F \cdot a = K \cdot b \quad [\text{Nm}]$$



Beliebig viele Kräftepaare können durch ein einziges ersetzt werden, dessen Moment M gleich der algebraischen Summe der Momente M_i der einzelnen Kräftepaare ist.

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{i=1}^n M_i = M$$

rechnerische Behandlung:

Wir wählen einen beliebigen Reduktionspunkt O und machen diesen zum Ursprung eines Koordinatensystems, dann zerlegen wir sämtliche Kräfte F_n in x und y Komponenten und denken uns sämtliche Kräfte nach O parallel verschoben.

Das dabei entstehende Moment verschiebt die Resultierende um den Abstand a.

$$a = \frac{M}{R} \quad [\text{Nm/N}] \quad \text{oder} \quad [\text{m}]$$

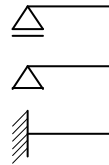
I.2. Grafische Behandlung

Ermittlung des Kraftecks und das Seileckverfahren sind der Mitschrift zu entnehmen. Eine große Bedeutung kommt der grafischen Behandlung bei der Ermittlung der Stabkräfte eines Fachwerks zu (siehe Kapitel I.4 Fachwerke).

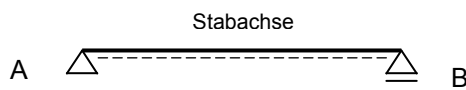
I.3. Statisch bestimmte Träger

I.3.1 Arten der Auflagerung

- bewegliches Auflager
- festes Auflager
- eingespannte Auflager

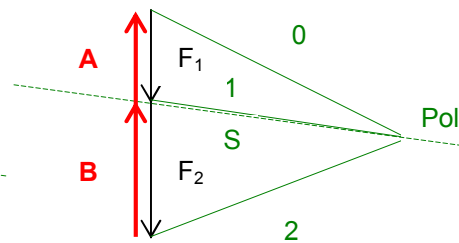
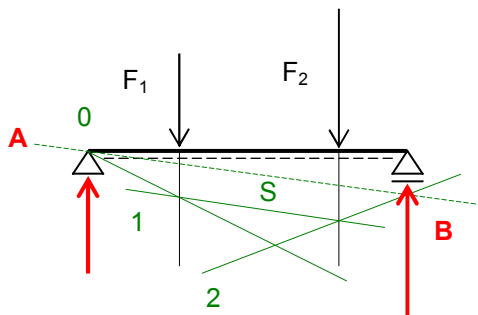
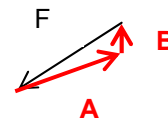
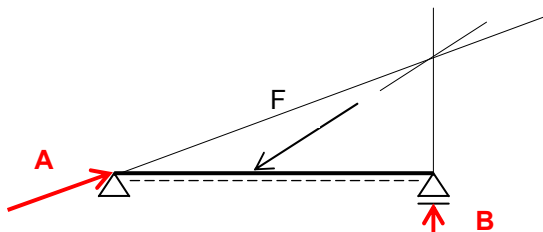


I.3.2 Träger auf zwei Stützen



I.3.2.1 Bestimmung der Auflagerreaktionen

a) grafische Lösung



S ... Schlusslinie

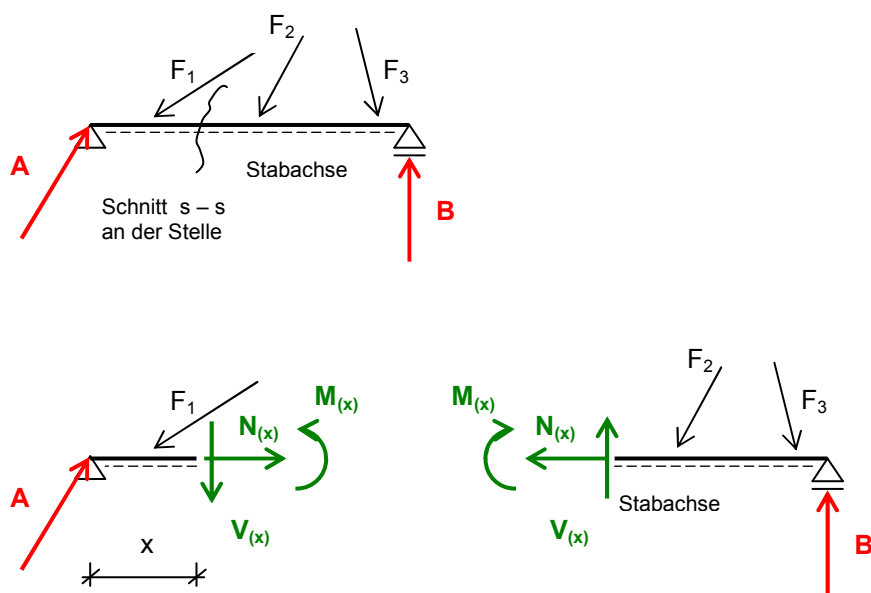
b) rechnerische Ermittlung der Auflagerreaktionen

Auflagerreaktionen und Lasten müssen ein Kraftsystem bilden das im Gleichgewicht ist. Für dieses Kraftsystem müssen daher die drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein.

$$\begin{array}{ll} \sum F_{iy} = 0 & \sum H_i = 0 \\ \sum F_{iz} = 0 & \sum V_i = 0 \\ \sum M_i = 0 & \sum M_i = 0 \end{array}$$

Da wir mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen sämtliche unbekannte Auflagerkräfte bestimmen können, sagen wir - *Der Träger ist statisch bestimmt.*

I.3.2.2 Die inneren Kräfte (Schnittkräfte)

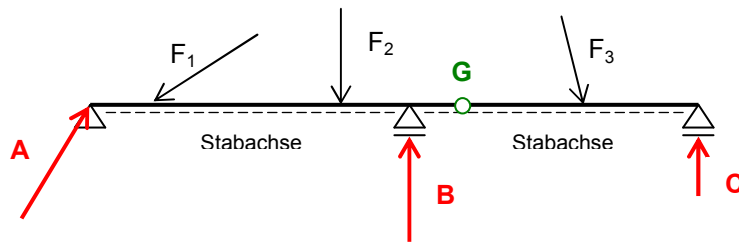


N ...	Normalkraft	
V, Q ...	Querkraft	sind Schnittkräfte
M ...	Moment	an der Stelle x(s)

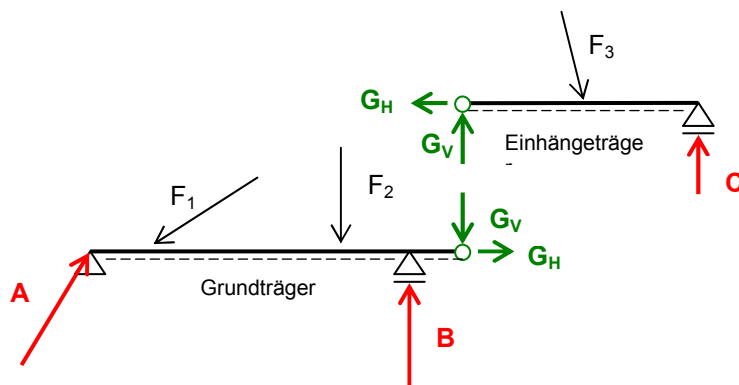
(In Wirklichkeit gibt es keine drei Wirkungen sondern nur eine Einzige).

Ein Moment ist positiv, wenn die Zugfasern unten sind (bei Rahmen innen Zug ist).

I.3.3 Gerberträger (Gelenksträger)



$$\begin{aligned}\sum H_i &= 0 \\ \sum V_i &= 0 \\ \sum M_i &= 0 \\ \sum M_G &= 0\end{aligned}$$



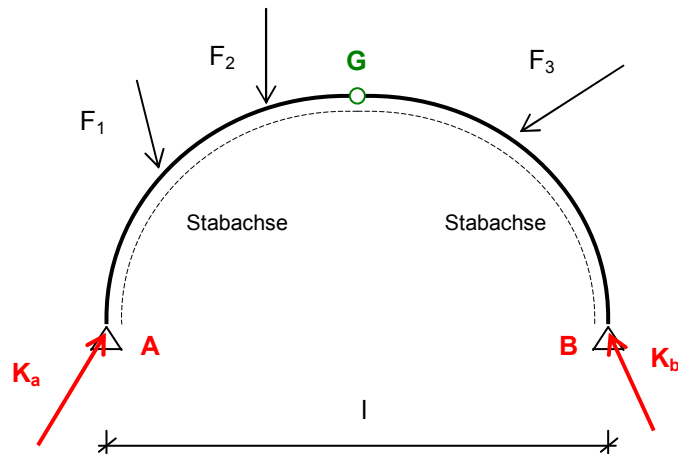
Durch den Einbau von Gelenken werden die Träger *statisch bestimmt*! Der Grad der statischen Unbestimmtheit von Durchlaufträgern entspricht der Anzahl der Innenstützen (gleich Anzahl der erforderlichen Gelenke).⁶

I.3.4 Dreigelenkbogen/ -rahmen

Der Vorteil des Dreigelenkbogens⁷ liegt in seiner Unempfindlichkeit gegenüber Verschiebungen des Widerlagers und seiner Zwängungsfreiheit bei Wärmeeinwirkungen. Es treten somit keine Zusatzspannungen auf.

G Scheitелgelenk
A, B Kämpfergelenke

K_a, K_b ... Kämpferdrücke
l Stützweite

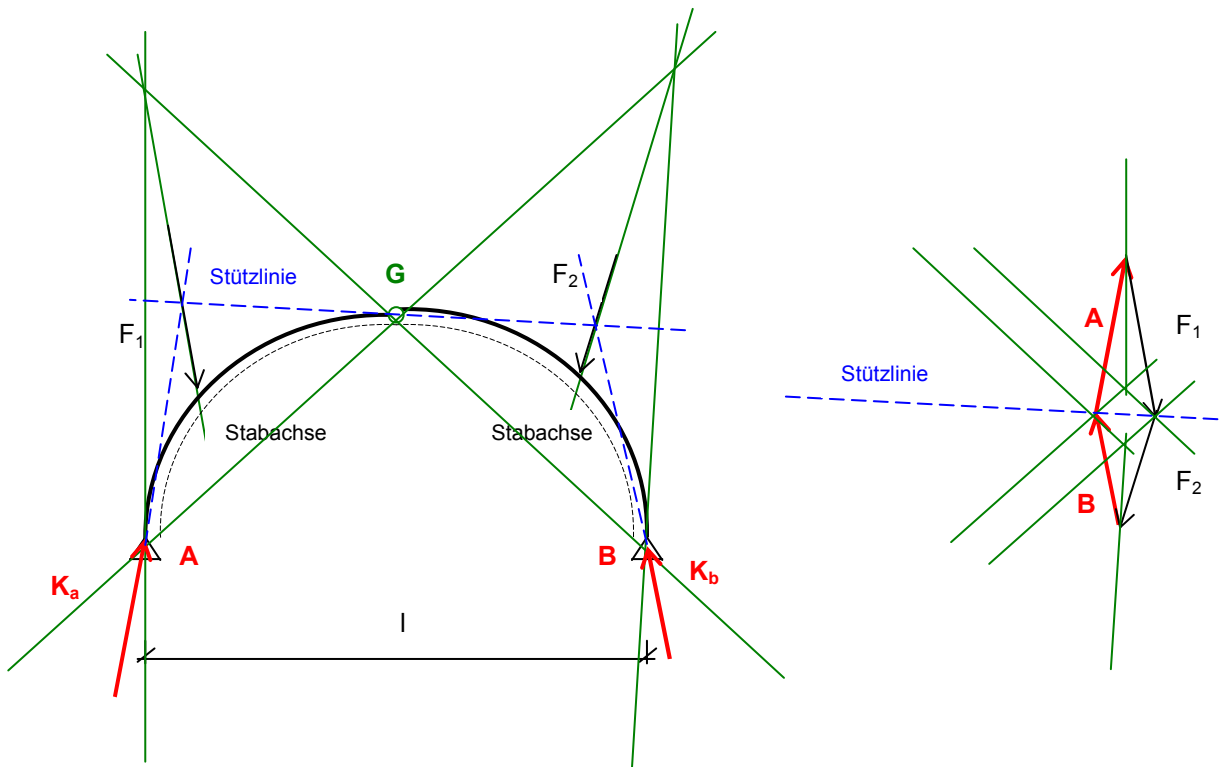


N ... wirkt in Richtung der Bogenachse und ist negativ, wenn sie eine Druckkraft ist
V, Q ... wirkt normal zur Bogenachse
M ... positiv, wenn innen Zug ist

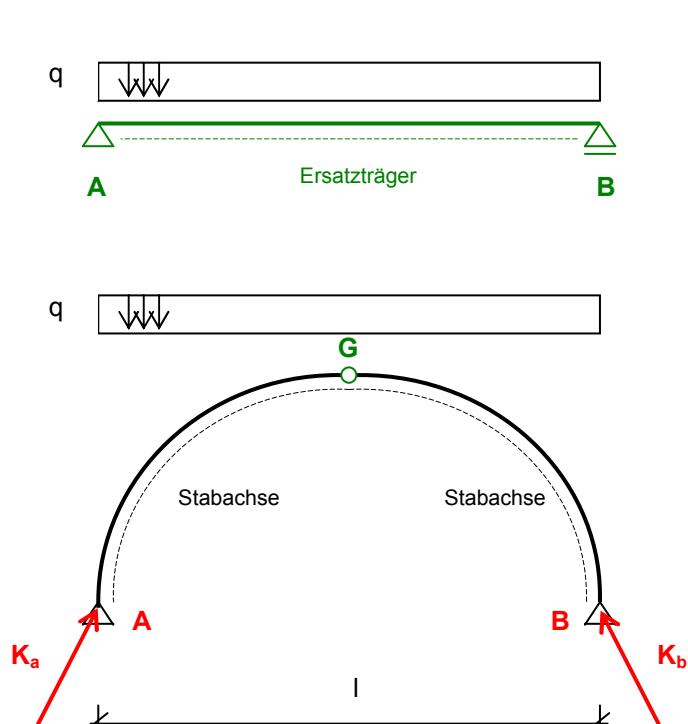
I.3.4.1 graphische Behandlung des Dreigelenksbogen

Das dabei entstehende Seileck nennt man *Stützlinie*. Die *Stützlinie*⁸ ist stets gleich der Wirkungslinie der Resultierenden der am Bogen aufeinander folgenden äußeren Kräfte. So ergibt sich bei Belastung des Tragwerks mit Einzelkräften ein Polygonzug, bei verteilter Last eine stetig gekrümmte Kurve.

Bestimmung von M, N und V im Dreigelenkbogen. Das **Moment** ist **positiv**, wenn die **Stützlinie oberhalb der Bogenachse** verläuft und **negativ**, wenn sie **unterhalb** liegt.



I.3.4.2 rechnerische Behandlung des Dreigelenksbogen



$$\bar{A} = \frac{1}{l} \cdot \sum F_i \cdot x_i'$$

$$\bar{B} = \frac{1}{l} \cdot \sum F_i \cdot x_i$$

$\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{M}$ und $\bar{V}$ bedeuten Auflager- und Schnittkräfte am Ersatzträger, M , N und V die Schnittkräfte am Bogen.

I.4 Fachwerke

Es gibt ebene und räumliche Fachwerke. Während ein vollwandiger Träger Biegemomente, Querkräfte und Normalkräfte aufnimmt, treten in den Fachwerksstäben nur Normalkräfte auf, die als *Stabkräfte* bezeichnet werden.

Zur Bestimmung der Stabkräfte, betrachten wir das Fachwerk als „ideales“ Fachwerk:

- 1) In den Knoten sind die Stäbe mit *reibungsfreien Gelenken* angeschlossen.
- 2) Die *Stabachsen* sind *gerade*.
- 3) Die *Stabanschlüsse* sind *zentrisch*.
- 4) Die Belastungen bestehen aus *Einzellasten*, die *nur in den Knoten* angreifen.

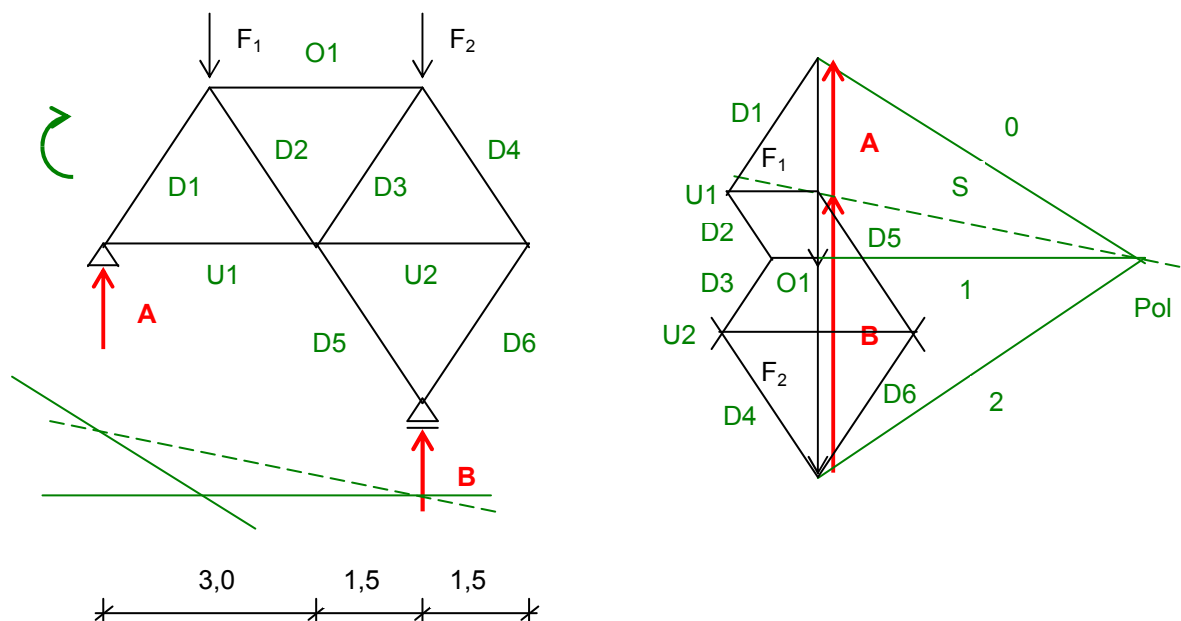
Unter diesen Voraussetzungen treten in den Stäben nur Normalkräfte (Zug- und Druckkräfte) auf.

Zugkräfte sind *positiv*
Druckkräfte sind *negativ*

I.4.1 graphische Behandlung

CREMONA Plan

(gezeichneter Rundschnitt)



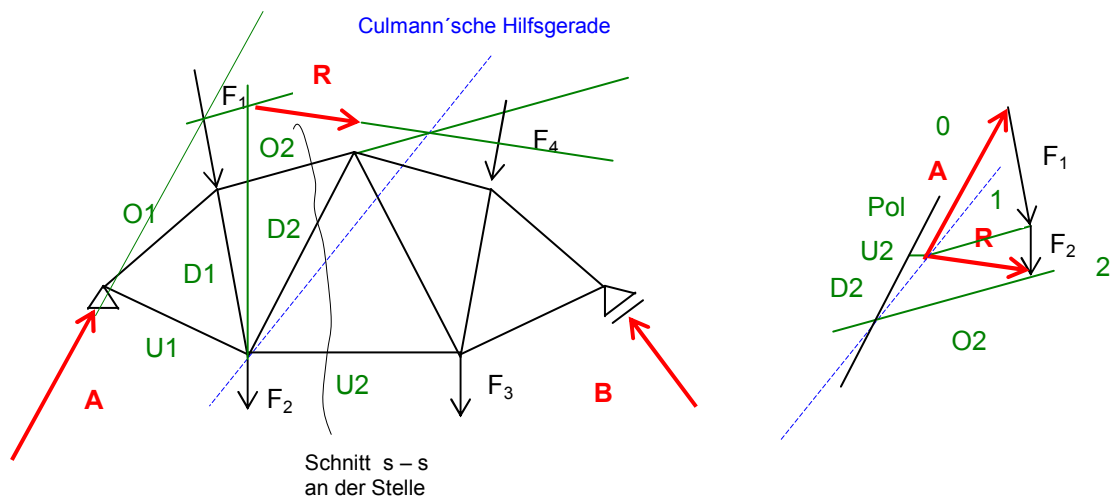
- Fachwerk muss statisch bestimmt sein (innerlich und Äußerlich)
- Stäbe bezeichnen ($O_1, O_2, \dots, U_1, U_2, \dots, V_1, V_2, \dots, D_1, D_2, \dots$)
- Umlaufsinn wählen
- Nullstäbe suchen und anschreiben
- Äußeres Gleichgewicht herstellen ($\Sigma H = 0, \Sigma V = 0, \Sigma M = 0$)
- Kräftemaßstab wählen
- Jeden Knoten graphisch ins Gleichgewicht setzen
(nur immer 2 Stabkräfte dürfen unbekannt sein)

Sind alle Stabkräfte an die Reihe gekommen, so muss sich der Cremona Plan schließen.

Ist das Fachwerk symmetrisch und ebenso die Belastung, so ist auch der Cremona Plan symmetrisch und es genügt daher den halben Plan zu zeichnen.

CULMANN

Das graphische Verfahren nach Culmann⁹ bietet gegenüber dem Cremona Plan den Vorteil, dass sich damit auch einzelne Stabkräfte bestimmen lassen.

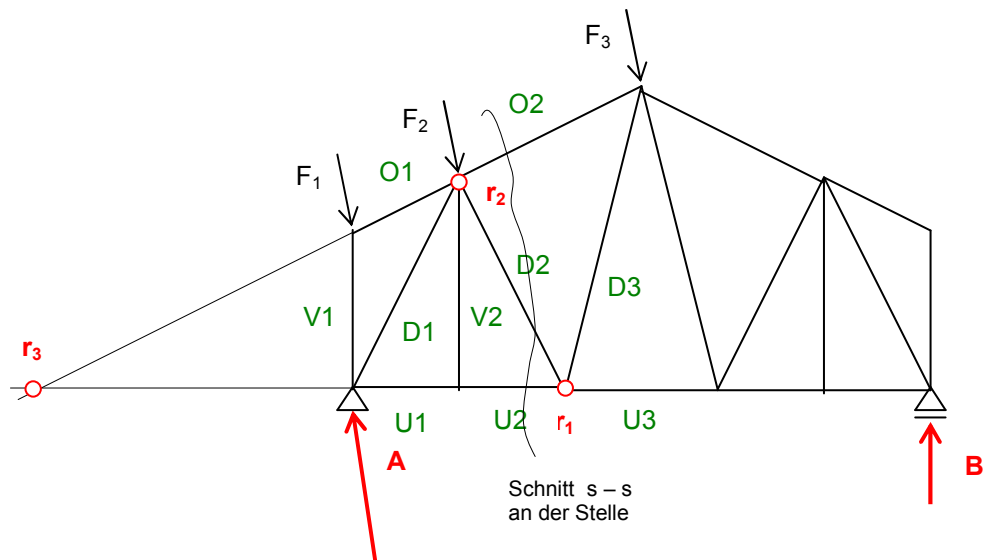


- Fachwerk muss statisch bestimmt sein (innerlich und Äußerlich)
- Stäbe bezeichnen ($O_1, O_2, \dots, U_1, U_2, \dots, V_1, V_2, \dots, D_1, D_2, \dots$)
- Dreistäbeschnitt durchführen
- Teilsystem ins Gleichgewicht setzen – resultierende Kraft R bestimmen
- R und eine Stabkraft (Obergurtkraft) zum Schnitt bringen
- Culmann'sche Hilfsgerade einzeichnen und Stabkräfte bestimmen

I.4.2 rechnerische Behandlung

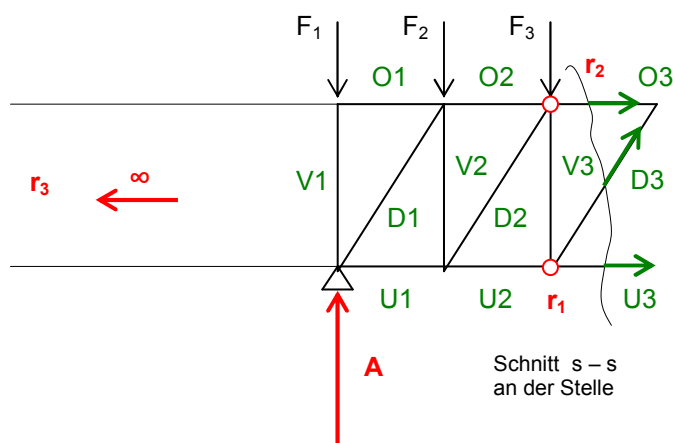
Verfahren nach Ritter:

Wir denken uns einen Schnitt $s-s$ geführt und setzen die Momentengleichung um die Ritterpunkte r (Momentenbezugspunkt) an.



Versagen der Rittermethode:

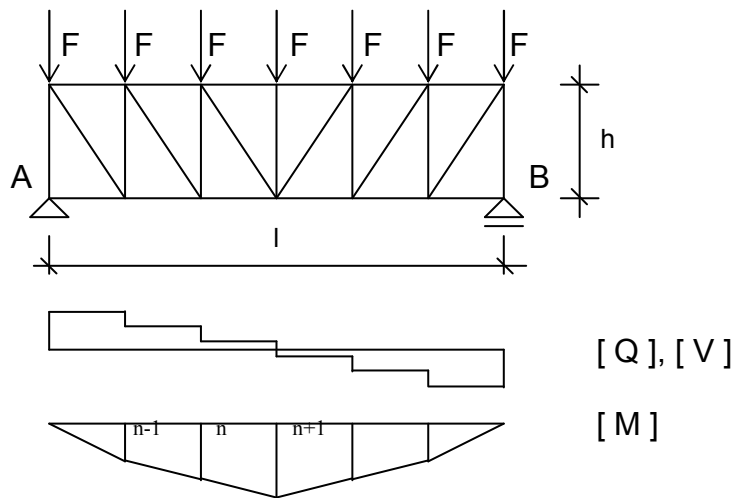
Das Ritterverfahren versagt, wenn die mit dem zu berechnenden Stab mitgeschnittenen Stäbe parallel sind (Ritterpunkt liegt im ∞).



Rundschnittverfahren:

Man denkt sich einen Knoten heraus geschnitten und wendet auf sämtliche an ihm angreifenden äußeren Kräfte und Stabkräfte die Gleichgewichtsbedingungen des zentralen Kraftsystems an (es dürfen nur zwei unbekannte Stabkräfte vorhanden sein).

Parallelträger bei lotrechter Belastung:



$$O = -\frac{M_{n+1}}{h}$$

$$U = \frac{M_n}{h}$$

$$D = \frac{Q}{\sin \varphi}$$

$$V = -Q$$

Das Moment ist immer an jener Stelle zu nehmen, wo der zugehörige Ritterpunkt liegt. Q ist in jenem Feld des Ersatzbalkens zu nehmen, wo der Dreistäbeschnitt den Lastgurt (der belastete Gurt) schneidet. Für D und V der rechten Seite sind die Vorzeichen von Q umzukehren.

Die Oben angegebenen Vorzeichen (für D und V) gelten, wenn die Diagonalen zur Mitte hin fallend sind. Wenn die Diagonalen zur Mitte hin ansteigen sind die Vorzeichen umzukehren. Diagonalen die zur Mitte hin fallen, sind bei symmetrischer Belastung *Zugstäbe*.

I.5 Ermittlung statischer Bestimmtheit

a) Abzählkriterien¹⁰

Allgemeine Form
$$n = (a + e \cdot s) - (b \cdot k + g)$$

mit $a + e \cdot s$: Spaltenzahl von $b \cdot k$ gleich Anzahl der Unbekannten

a ... Summe der möglichen Auflagerreaktionen
 e ... Unabhängige Stabendkraftgrößen je Stabelement
 s ... Summe aller Stabelemente zwischen k Knotenpunkten

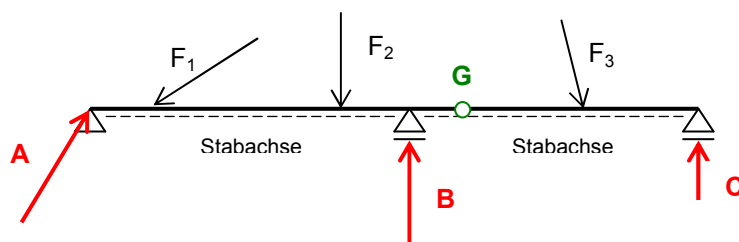
$b \cdot k + g$: Zeilenzahl von $b \cdot k$ gleich Anzahl der Bestimmungsgleichungen

b ... Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen je Knoten
 k ... Summe aller Knotenpunkte einschließlich Auflagerknoten
 g ... Summe aller Nebenbedingungen (ohne Auflagerknoten)

Sonderformen des Abzählkriteriums:

Allgemeine Stabwerke

ebene	$e = 3$	$b = 3$	$n = a + 3 \cdot (s - k) - g$
räumliche	$e = 6$	$b = 6$	$n = a + 6 \cdot (s - k) - g$

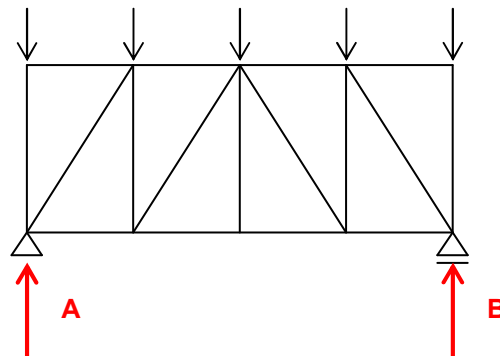


$$n = 4 + 3 \cdot (3 - 4) - 1 = 0$$

(statisch bestimmt!)

Ideale Fachwerke ohne Nebenbedingungen

ebene	$e = 1$	$b = 2$	$n = a + s - 2k$
räumliche	$e = 1$	$b = 3$	$n = a + s - 3k$

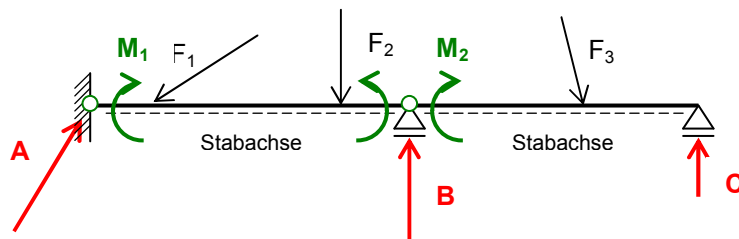


$$n = 3 + 17 - 2 \cdot 10 = 0$$

(statisch bestimmt!)

b) Aufschneiden bis System statisch bestimmt ist:

Dieses Verfahren kommt vor allen bei hochgradig statisch unbestimmten Systemen zur Anwendung, da wir uns das langwierige Abzählen der Stäbe und Knoten ersparen. Pendelstäbe werden zuerst herausgeschnitten, dann die übrigen überzähligen Stäbe bzw. Auflagerreaktionen. Die Summe der dadurch entstandenen Schnittgrößen M , N und V bzw. Q ergibt den Grad der statischen Unbestimmtheit.



$$n = M_1 + M_2 = 2$$

(2-fach statisch unbestimmt!)

I.6 Statische Berechnung

1 Lastaufstellung

Hier muss nach den Belastungsannahmen lt. ÖNormen vorgegangen werden. Eigenlasten von Baustoffen und Bauteilen, eventuell Lagergüter, Nutzlasten im Hochbau, Schnee- und Eislasten, Statische Windkräfte und Erdbebenkräfte

2 Wahl des statischen Systems

Statisch bestimmt oder unbestimmt, Vor- und Nachteile des jeweiligen Systems, wo sind bewegliche Auflager erforderlich bzw. zwingend anzubringen und wo ist eine Einspannung von Vorteil. Begründen sie immer ihre Wahl des statischen Systems z.B. statisch bestimmtes System, da der Aufwand zur Berechnung des Systems geringer ist und somit Zeit und Geld spart.

3 Ermittlung der Kräfte und Schnittgrößen

Bei statisch bestimmten Systemen kaum ein Problem. Hingegen bei statisch unbestimmten Systemen muss zuerst die Entscheidung getroffen werden, welches Berechnungsverfahren am günstigsten ist (Winkler, Cross, Clapeyron, Kraftgrößenverfahren bzw. Deformationsmethode,...).

4 Bemessung des Tragwerkes (Festigkeitslehre Voraussetzung)

Dieser Punkt setzt die Kenntnis der Festigkeitslehre voraus (Schwerpunkt, statisches Moment, Widerstandsmoment, Trägheitsmoment, Deviationsmoment, ...). Die Bemessung erfolgt meist mit den Werkstoffen Stahl, Holz und Stahlbeton

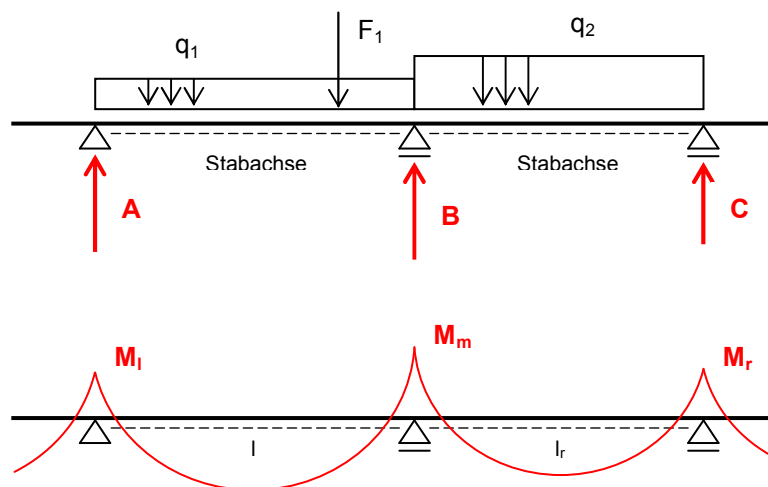
I.7 Statisch unbestimmte Systeme

I.7.1 Winkler

siehe Vortag und Bautabellenbau (Ausgabe 2004/05) S 118 ff

I.7.2 Clapeyron (Dreimomentengleichung)

Kommt meist bei Durchlaufträgern zur Anwendung. Bei sehr langen Durchlaufträgern empfiehlt es sich das feste Auflager in der Mitte anzuordnen. Es wird davon ausgegangen, daß der Träger ein konstantes Trägheitsmoment besitzt. Dies ist allerdings nur für die Berechnung der Schnittgrößen zulässig, nicht für die Ermittlung der Durchbiegung an einem bestimmten Punkt. Durch diesen Sonderfall wird aus der Dreimomentengleichung die Clapeyronsche Gleichung.¹¹



$$l_i \cdot M_{i-1} + 2 \cdot (l_i + l_{i+1}) \cdot M_i + l_{i+1} \cdot M_{i+1} = -6 \cdot (B_i + A_{i+1})$$
$$\frac{l_l}{I_l} \cdot (M_l + 2 \cdot \Psi_l \cdot M_m + R_l) + \frac{l_r}{I_r} \cdot (2 \cdot \Psi_r \cdot M_m + M_r + L_r) = 0$$

$$(M_l + 2 \cdot M_m + R_l) \cdot l_l + (2 \cdot M_m + M_r + L_r) \cdot l_r = 0$$

I.7.3 CROSS, Iterationsverfahren

Das Momentenausgleichsverfahren nach Cross¹² ist ein Iterationsverfahren. Zunächst werden dabei alle Knotenpunkte unverdrehbar (eingespannt) festgehalten gedacht und hierfür die *Volleinspannmomente* bestimmt. Nunmehr wird dieses Momentenbild dadurch verbessert, daß nacheinander immer nur ein Knoten „losgelassen“ wird, wodurch an ihm ein *Restmoment* frei wird, welches sich entsprechend der Steifigkeit der einzelnen Stäbe des Knotens auf diese verteilt und zu den benachbarten Knoten überträgt.

Dieser Vorgang wird von Knoten zu Knoten fortschreitend so lange wiederholt, bis sich an allen Knoten die Momente ausgeglichen haben und $\Sigma M = 0$.

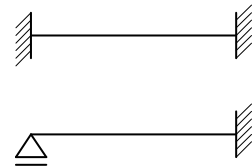
Wir unterscheiden zwei Tragwerksarten

verschiebbliche und unverschiebbliche

Stabsteifigkeit k_i :

$$k_i = \frac{I_i}{l_i}$$

$$k_i' = \frac{3}{4} \cdot k_i = \frac{0,75 \cdot I_i}{l_i}$$



Knotensteifigkeit:

Knotensteifigkeit ist die Summe der Stabsteifigkeiten die in einem Knotenende zusammentreffen.

$$k_N = \sum_{i=1}^n k_i$$

Ausgleichsbeiwert:

Unter dem Ausgleichs- oder Verteilungsbeiwert versteht man das negative Verhältnis der Stabsteifigkeit zu der Knotensteifigkeit.

$$\alpha = \frac{-k_i}{\sum k_i} = \frac{-k_i}{k_N}$$

$$\sum \alpha = -1$$

Vorgehensweise bei der Berechnung:

- 1) Volleinspannmomente unter Beachtung der Vorzeichen
- 2) Stabsteifigkeiten ermitteln
- 3) Knotensteifigkeiten ermitteln
- 4) Verteilungszahlen (Ausgleichsbeiwerte) bestimmen
- 5) Übertragungsziffern (Fortleitungszahlen) bestimmen.
- 6) Der Ausgleich wird an einer Systemskizze durchgeführt. Der Ausgleich beginnt am Knoten mit dem größten Restmoment $\Delta M'$. Berechnen der Ausgleichsmomente $\Delta M = \alpha * \Delta M_N'$, Eintragung unter die Volleinspannmomente und Unterstreichung (grün). Berechnung der Übertragungsmomente M'' und in der Systemskizze an den benachbarten Knoten anschreiben (blau unterstrichen).
- 7) Der gleiche Vorgang wird nun mehr an den Knoten mit dem nächst größeren Moment wiederholt. Bei einem Nachbarknoten kommen die Übertragungsmomente zu den Volleinspannmomenten hinzu. Ausgleich solange bis die Restmomente vernachlässigbar klein sind.
- 8) Berechnung der endgültigen Knotenmomente durch Addition der Volleinspannmomente, der Ausgleichsmomente und der Übertragungsmomente.

Vorzeichenregelung nach CROSS:



Hinweise für die Berechnung symmetrischer Tragwerke

Ersatzsteifigkeiten¹³

Last	gegebenes System	Ersatzsystem
Antimetrie		
Symmetrie		
¹⁾ für Stiele in Sym.-Achse gilt $M_{\text{geg. Syst.}} = 2 \times M_{\text{Ers. S.}}$		

Abb. 160. Ersatzsteifigkeiten

Tabelle der k' -Werte bei symmetrischen Systemen

gegebenes System mit den Steifigkeiten k	Belastung	Ersatzsystem mit den Steifigkeiten k'	Bemerkung
	symmetrisch 		keine Fortleitung zu Knoten C
	antimetrisch 		
	symmetrisch 		bei B Volleinspannung
	antimetrisch 		bei B $M_B = 0$

Abb. 149. Zusammenstellung der Stabsteifigkeiten k' für symmetrische und antimetrische Belastung

I.7.4 Kraftgrößenmethode

Die Kraftgrößenmethode erlaubt eine umfassende Ermittlung der Auflager- und Schnittgrößen eines statisch unbestimmten Systems.

Das statisch bestimmte Grundsystem wird erhalten durch Lösen von n Bindungen (z.B. Lösen einer Auflagerreaktion, Einführen eines Gelenks) und Wahl von n statisch Unbestimmten $X_1, X_2, \dots, X_n$ (Kraftgrößen).

Im statisch unbestimmten System sind die statisch unbestimmten Größen X_i von null verschieden und die Verschiebungen und Verdrehungen δ_{ik} ihrer Angriffspunkte gleich null.

Im zugehörigen Grundsystem sind die statisch unbestimmten Größen gleich null und die Verschiebungen und Verdrehungen ihrer Angriffspunkte von null verschieden.

einfach statisch unbestimmt: $\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0$

mehrfach statisch unbestimmt:
$$\begin{aligned} \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + \dots + X_n \cdot \delta_{1n} &= 0 \\ \delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + \dots + X_n \cdot \delta_{2n} &= 0 \\ \delta_{30} + X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + \dots + X_n \cdot \delta_{3n} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{n0} + X_1 \cdot \delta_{n1} + X_2 \cdot \delta_{n2} + X_3 \cdot \delta_{n3} + \dots + X_n \cdot \delta_{nn} &= 0 \end{aligned}$$

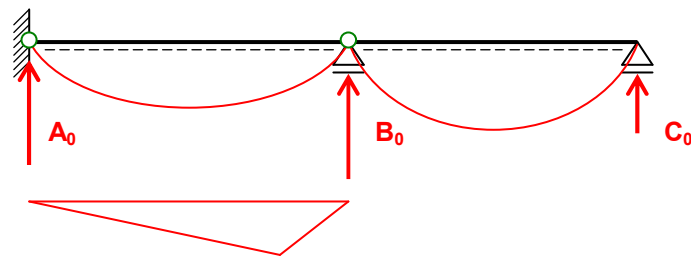
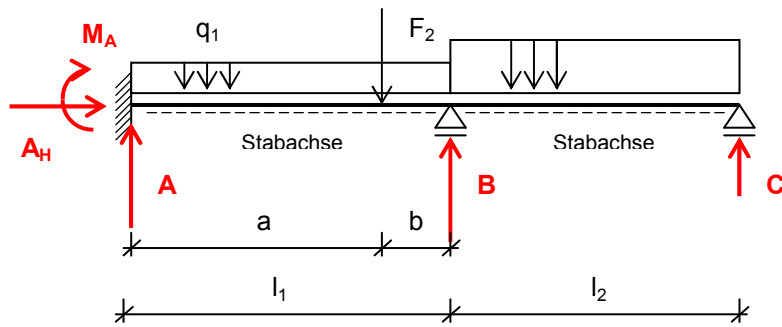
in Matrizenform:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{2n} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \dots & \delta_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \\ \dots \\ \delta_{n0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

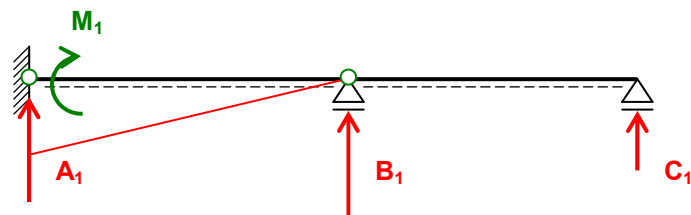
der erste Index gibt immer den Ort, an dem die Größe wirkt, und der zweite Index die Ursache an.

Prinzip der virtuellen Arbeit

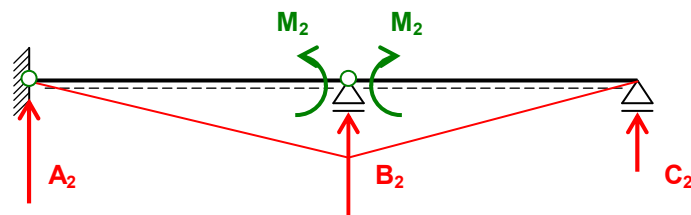
$$\delta_{ik} = \frac{1}{E \cdot J_c} \cdot \left(\frac{J_c}{J} \cdot \int_l M_i \cdot M_k \cdot dx + \frac{J_c}{A} \cdot \int_l N_i \cdot N_k \cdot dx + \frac{\kappa \cdot E \cdot J_c}{G \cdot A} \cdot \int_l Q_i \cdot Q_k \cdot dx \right)$$



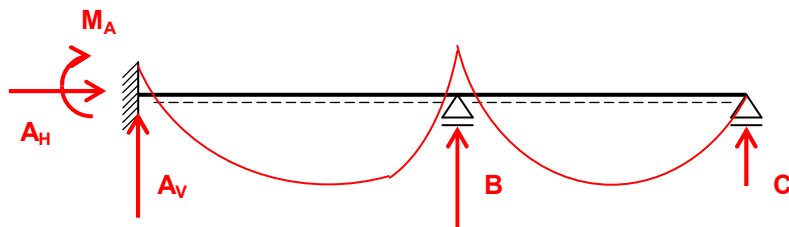
[M_0]



[M_1]



[M_2]



[M]

II. Festigkeitslehre

II.1. Einführung, Allgemeines

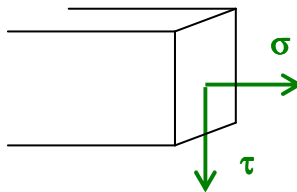
Die Festigkeitslehre liefert die Grundlagen für die Bemessung der einzelnen Bauteile technischer Konstruktionen. Sie basiert neben praktischen Erfahrungen auf der mathematischen *Elastizitätslehre*.

Das einfachste Elastizitätsgesetz ist die Annahme, dass zwischen den Spannungen und Formänderungen ein linearer Zusammenhang besteht. Unter einer Spannung versteht man die auf eine Flächeneinheit bezogene Kraft [kN/cm²] bzw. [N/mm²].

Die Beanspruchungsarten sind:

Spannungsarten:

Zug
Druck
Biegung
Abscherung
Torsion
Knickung



σ ... Normalspannung

τ ... Schubspannung

σ entsteht bei Zug, Druck, Biegung und Knickung

τ entsteht bei Abscherung und Torsion

Spannungsverteilung:

Bei *Zug- und Druckbeanspruchungen* verteilen sich die *Spannungen gleichmäßig* über den Querschnitt. Bei *Biegung* treten Zug- und Druckspannungen mit einer *linearen Verteilung* auf.

Beim Ausknicken treten im Wesentlichen Druckspannungen auf. Das *Knickproblem* ist jedoch kein Spannungsproblem, sondern ein *Stabilitätsproblem!!!*

II.2. Elastizitätstheorie

Jede Krafteinwirkung auf einen Körper hat Spannungen und somit auch Verformungen zur Folge. Bei Zug- und Druckbeanspruchungen entsteht eine Längenänderung. Das Verhältnis dieser Längenänderung zur ursprünglichen Länge l_0 bezeichnen wir als spezifische Längenänderung.

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon \quad \dots \text{spezifische Längenänderung} \quad [-]$$

$$\frac{\Delta d}{d} = \varepsilon_q$$
$$\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} = \mu$$

μ ... Querkontraktionszahl [-]

$$\mu_{\text{Stahl}} = 0.333333 \quad m_{\text{Stahl}} = 1/\mu = 3.0 \quad (\text{Poisson'sche Zahl})$$
$$\mu_{\text{Beton}} = 0.111111 \text{ bis } 0.166666 \quad m_{\text{Beton}} = 9.0 \text{ bis } 6.0$$

wieder verschwindende Verformung	-	<i>elastische Längenänderung</i>
bleibende Verformung	-	<i>plastische Längenänderung</i>

Es gelten das *Hooke'sche Gesetz* und die *Bernoulli Hypothese* d.h. es besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen (Hooke, Werkstoff verhält sich linear elastisch) sowie das Ebenbleiben der Querschnitte (Bernoulli).

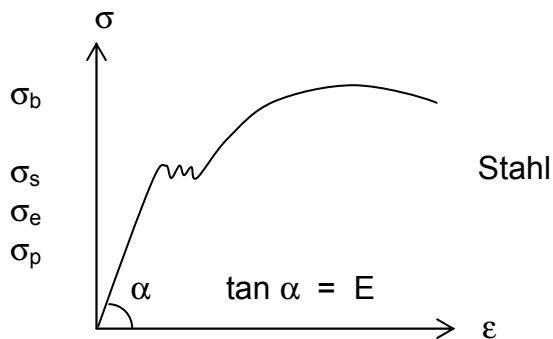
Weiters wird angenommen, dass

- Der Träger stabförmig ist (Querschnittsabmessungen sind klein gegenüber der Länge)
- Die auftretenden Formänderungen sind vernachlässigbar klein (sie bleiben ohne Einfluss auf das Gleichgewicht d. äußeren Kräfte) - *Theorie 1. Ordnung*
- Die Stabachse ist gerade. Der Querschnitt ist mindestens einfach symmetrisch und ändert sich längs der Stabachse nicht sprunghaft.
- Der Werkstoff homogen (und isotrop) ist.

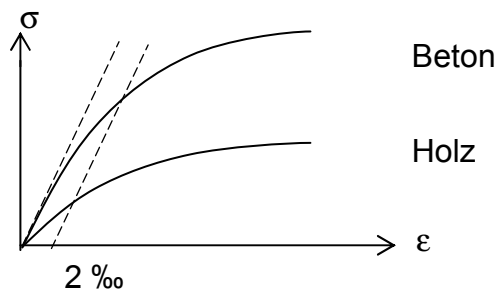
Einaxialer Zugversuch:

Werkstoff: Stahl

gesucht: Arbeitslinie bzw. Spannungs- Dehnungsbeziehung



σ_b ... Bruchgrenze
 σ_s ... Streckgrenze
(Fließgrenze σ_f)
 σ_e ... Elastizitätsgrenze
 σ_p ... Proportionalitätsgrenze



$$\sigma = f(\varepsilon)$$

(Geradengleichung)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

E ... Elastizitätsmodul (= Werkstoffkonstante)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad [\text{kN/cm}^2] \text{ bzw. } [\text{N/mm}^2]$$

G ... Schubmodul

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad [\text{kN/cm}^2] \text{ bzw. } [\text{N/mm}^2]$$

Holz:

$$E = 800 - 1550 \quad [\text{kN/cm}^2]$$
$$G = 50 - 70 \quad [\text{kN/cm}^2]$$

Stahl:

$$E = 20600 \quad [\text{kN/cm}^2]$$
$$G = 8000 \quad [\text{kN/cm}^2]$$

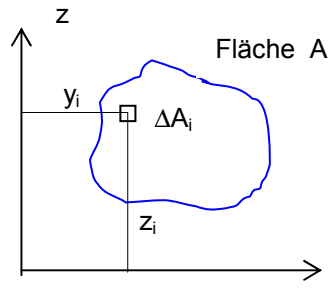
Beton:

$$E_c = 2600 - 3700 \quad [\text{kN/cm}^2]$$
$$G = 1000 - 1900 \quad [\text{kN/cm}^2]$$

II.3. Bemessungsverfahren

II.3.1 Geometrisch bedingte Größen¹⁴

II.3.1.1 Schwerpunkt



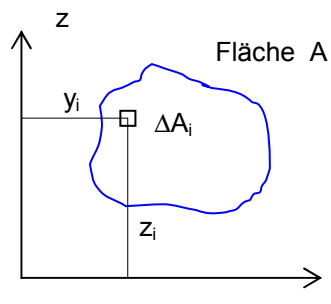
$$\Sigma(\Delta A_i \cdot y_i) = A \cdot y_s$$

$$y_s = \Sigma(\Delta A_i \cdot y_i) / A$$

$$z_s = \Sigma(\Delta A_i \cdot z_i) / A$$

Die Summe der Momente der Teilflächen ΔA_i in Bezug auf die y-Achse ist gleich dem Moment der Gesamtfläche mal dem Schwerpunktsabstand zur y-Achse. Das gleiche gilt für die z-Achse. Der Schwerpunktsabstand ist das jeweilige *statische Moment* (S_y bzw. S_z) durch die Gesamtfläche A.

II.3.1.2 Trägheitsmoment



$$\Sigma(\Delta A_i \cdot z_i^2) = I_y = \int z^2 dA \quad [\text{cm}^4]$$

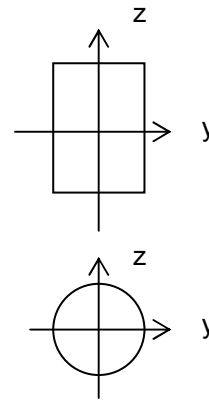
$$\Sigma(\Delta A_i \cdot y_i^2) = I_z = \int y^2 dA \quad [\text{cm}^4]$$

Das Trägheitsmoment I_a in Bezug auf die Achse a ist somit die Summe aller Produkte der Flächenelemente ΔA mit dem Quadrat ihres Normalabstandes r_a zur Achse a. Das Trägheitsmoment ist ein Maß für den Widerstand des Querschnitts dem Moment entgegengesetzt.

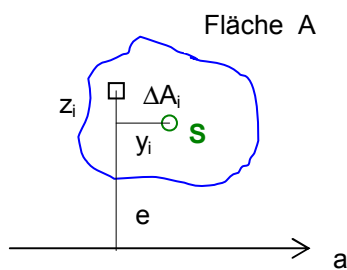
$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \rightarrow \text{Rechteck}$$

$$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12} \rightarrow \text{Rechteck}$$

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \rightarrow \text{Kreis}$$

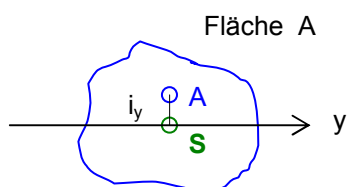


Wenn das Trägheitsmoment um eine Achse, die nicht durch den Schwerpunkt der Fläche geht, gesucht wird, kommt der *Satz von Steiner* zur Anwendung.



$$I_a = I_s + A \cdot e^2$$

II.3.1.3 Trägheitsradius

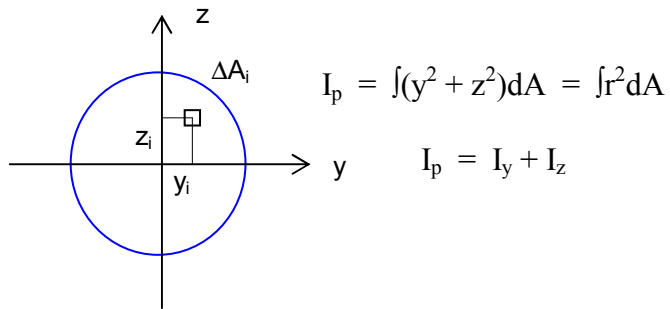


$$A \cdot i_y^2 = I_y$$

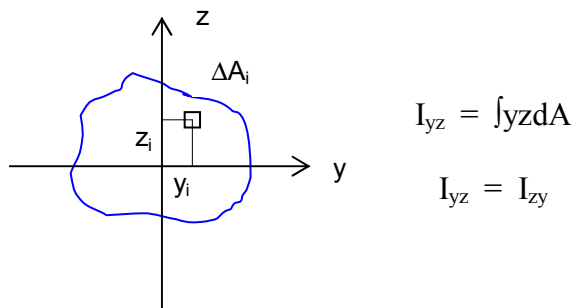
$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Unter dem Trägheitsradius verstehen wir jenen Abstand i vom Schwerpunkt S indem ich mir die Gesamtfläche in einem Punkt vereinigt denken kann, so dass Fläche mal Abstand zum Quadrat ($A \cdot i^2$) das Trägheitsmoment I ergibt.

II.3.1.4 Polares Trägheitsmoment



II.3.1.5 Deviationsmoment (Zentrifugalmoment)

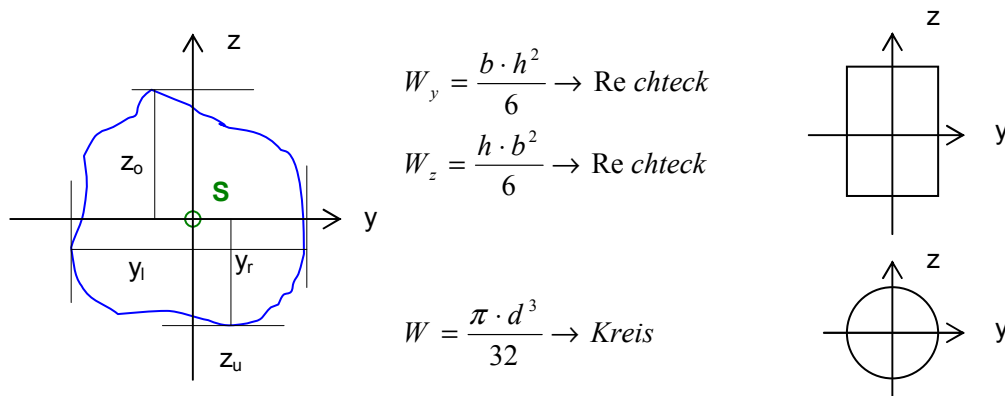


Wird das Deviationsmoment zu Null, dann sind die y und z Achsen, die senkrecht aufeinander stehen, die *Hauptträgheitsachsen* und I_y und I_z die so genannten *Hauptträgheitsmomente*.

Symmetrieachsen sind immer Hauptträgheitsachsen!

II.3.1.6 Widerstandsmoment

Auch bei symmetrischen Querschnitten darf das Widerstandsmoment nicht über die Differenz der beiden Widerstandsmomente gerechnet werden!



II.3.2 Spannungsnachweise

II.3.2.1 Normal- und Schubspannung

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \rightarrow \sigma = \frac{N}{A}$$

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

$$\tau = G \cdot \gamma \rightarrow \tau = \frac{N}{A_a}$$

$$\Delta l = \alpha \cdot \Delta t \cdot l$$

II.3.2.2 Einaxiale Biegespannung

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

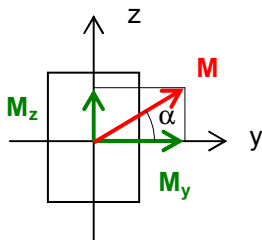
$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{\max} = \frac{M_y}{W_y} \rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\min}}$$

II.3.2.3 Zweiachsale Biegespannung

Wir zerlegen dazu das angreifende Moment in die Komponenten M_y und M_z . (Bei einem Kreisquerschnitt gibt es keine schiefe Biegung, da die Momentenebene immer in einer Hauptachse liegt.)

$$M_y = M \cdot \cos \alpha$$

$$M_z = M \cdot \sin \alpha$$



$$\sigma_{y,z} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z + \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

$$\sigma_{\max} = \pm \left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \right)$$

II.3.2.4 Einaxiale Biegespannung und Normalspannung (exzentrischer Kraftangriff)

$$e = \frac{M}{N}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot z \rightarrow \sigma_{\max} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y}$$

II.3.2.5 Zweiaxiale Biegespannung und Normalspannung

Der Kraftangriffspunkt liegt nicht auf einer Hauptachse.

$$\begin{aligned} M_y &= N \cdot z \\ M_z &= N \cdot y \end{aligned}$$

$$\sigma_{y,z} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot z \pm \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

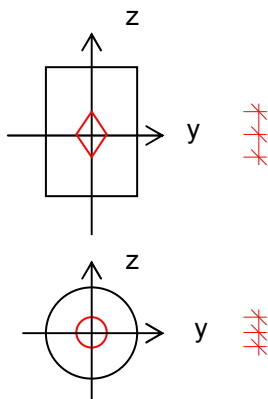
$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z}$$

Gleichung der Nulllinie:

$$\sigma_{y,z} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot z \pm \frac{M_z}{I_z} \cdot y = 0$$

II.3.2.6 Kernfläche eines Querschnittes

Die Kenntnis der Kernfläche¹⁵ ist wichtig bei Baustoffen, die nicht auf Zug beansprucht werden dürfen (z.B. Boden, Mauerwerk,...).



$$k = \frac{h}{6} \rightarrow \text{Rechteck}$$

$$k = \frac{d}{8} \rightarrow \text{Kreis}$$

II.3.2.7 Versagen der Zugzone¹⁶

Kraftangriff erfolgt auf einer Hauptachse:

$$\Sigma M = 0, \Sigma V = 0$$

$$N = \frac{\sigma \cdot 3 \cdot c \cdot b}{2}$$

$$\sigma = \frac{2 \cdot N}{3 \cdot c \cdot b}$$

Kraftangriff erfolgt nicht auf einer Hauptachse:

$$\mu = f\left(\frac{r_x}{a}, \frac{r_y}{b}\right)$$

$$\sigma_{\max} = \mu \cdot \frac{N}{a \cdot b}$$

II.3.2.8 Schubspannung

Schubspannungen treten nur auf, wenn der Momentenverlauf veränderlich ist. In Wirklichkeit wirken keine Einzelspannungen, sondern nur eine Hauptspannung σ . Diese Hauptspannung kann in eine Normal- und eine Schubspannungskomponente (Hilfs- bzw. Rechengrößen) zerlegt werden.

$$\tau = \frac{Q \cdot S_y}{I_y \cdot b}$$

$$S_y = \Delta A \cdot z_s$$

S_y ist das statische Moment des oberhalb bzw. unterhalb von a-a liegenden Teiles der Querschnittsfläche in Bezug auf die horizontale Schwerachse.

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot A} \rightarrow \text{Rechteck}$$



$$\tau_{\max} = \frac{4 \cdot Q}{3 \cdot A} \rightarrow \text{Kreis}$$



$$\tau = \frac{Q}{A_{\text{Steg}}} \rightarrow \text{I - Träger}$$

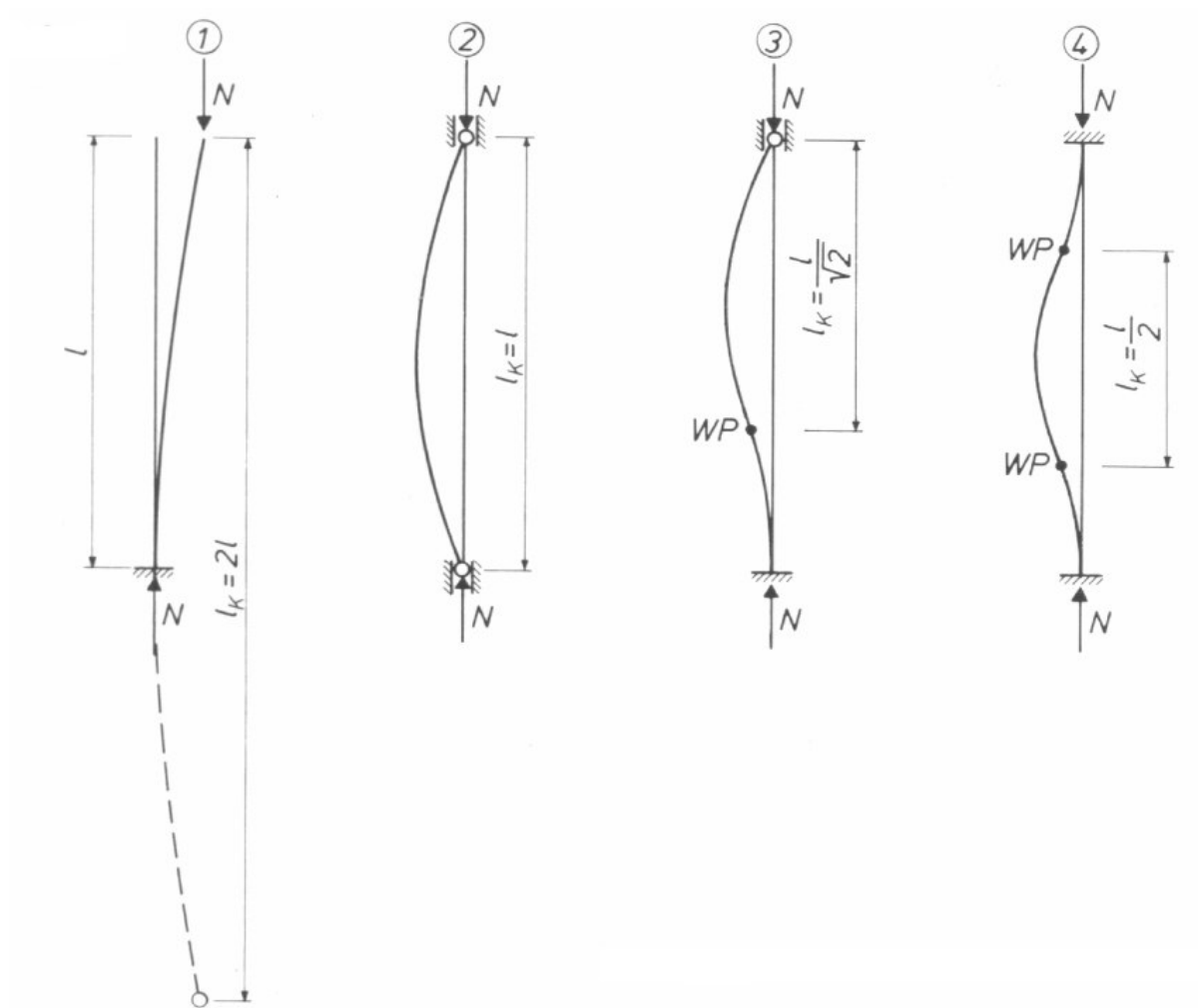


II.3.3 Stabilitätsnachweis (Knickung)¹⁷

Diese Verformung wird verursacht durch unvermeidliche *Exzentrizitäten des Lastangriffes*, durch kleine *Abweichungen der Stabachse von der Geraden* und schließlich durch *Ungleichmäßigkeiten des Materials*.

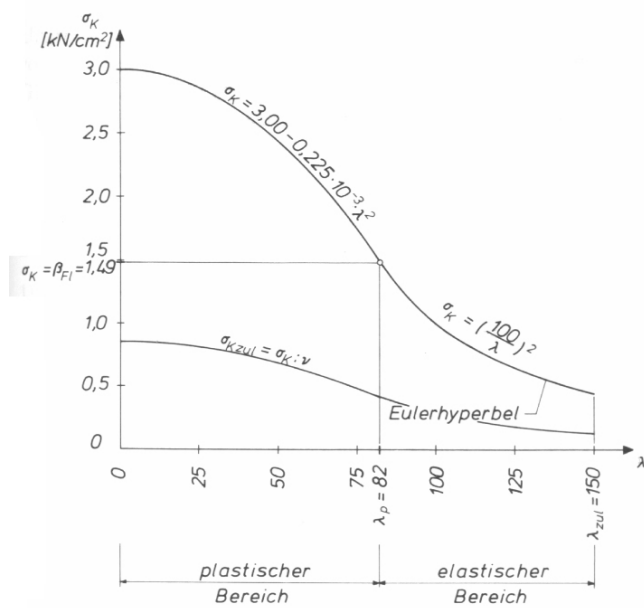
$$N_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_k^2} \dots \text{kritische Last}$$

l_k ... Knicklänge

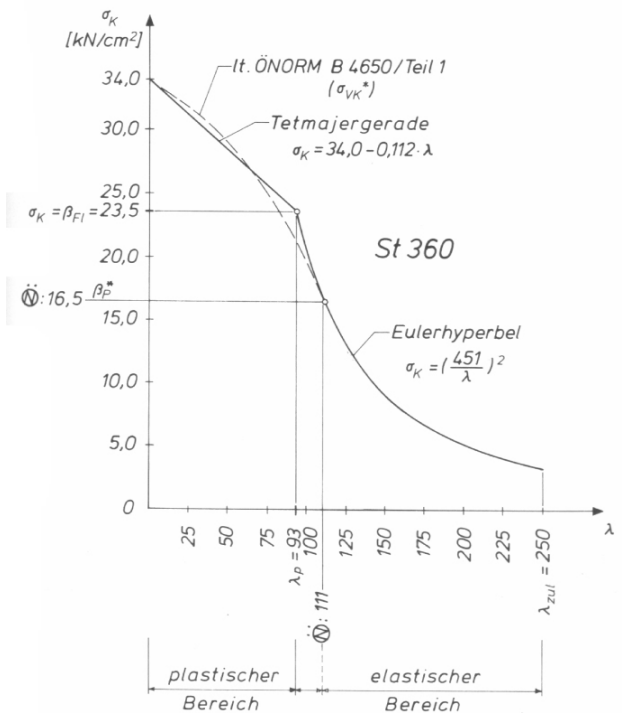


$$\sigma = \frac{\pi^2 \cdot E}{\frac{l_k^2}{i^2}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

Hyperbelgleichung



Knickspannungen für Holz



Knickspannungen für Stahl

II.3.3.1 Knicken

Stahl:

$$\sigma_{vorh} = \frac{N}{A} \leq \sigma_{k,zul}$$

Holz:

$$\sigma_{vorh} = \frac{\omega \cdot N}{A} \leq \sigma_{d,zul}$$

II.3.3.2 Biegeknicken

Stahl:

$$\sigma_{vorh} = \frac{\sigma_{zul} \cdot N}{\sigma_{k,zul} \cdot A} + 0.9 \cdot \frac{M}{W_D} \leq \sigma_{zul}$$

Holz:

$$\sigma_{vorh} = \frac{\omega \cdot N}{A} + \frac{\sigma_{DII,zul}}{\sigma_{B,zul}} \cdot \frac{M}{W} \leq \sigma_{D,zul}$$

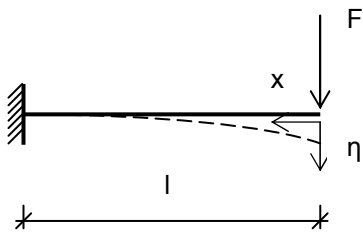
II.3.4 Gebrauchstauglichkeitsnachweis (Biegelinie)¹⁸

Verformungen/Verschiebungen:

Dehnung, Stauchung, Wärmeausdehnung, Durchbiegung, Verdrehung

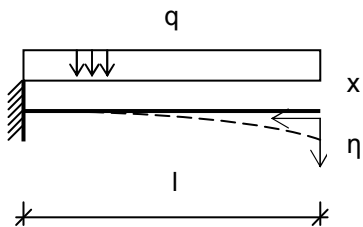
Wir setzen voraus, dass der Balken im Verhältnis zu seiner Länge dünn sei. Die Wirkung der Querkkräfte gegenüber der der Biegemomente ist vernachlässigbar klein (das trifft bei kleinen Stützweiten nicht zu). Siehe auch Bautabellenbuch S 93 ff.

Beispiele:



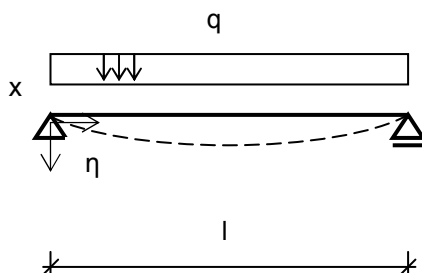
$$\eta = \frac{F \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} \left[\left(\frac{x}{l} \right)^3 - 3 \cdot \frac{x}{l} + 2 \right]$$

$$f = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \rightarrow x = 0$$



$$\eta = \frac{q \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I} \left[\left(\frac{x}{l} \right)^4 - 4 \cdot \frac{x}{l} + 3 \right]$$

$$f = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I} \rightarrow x = 0$$



$$\eta = \frac{q \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I} \left[\left(\frac{x}{l} \right)^4 - 2 \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \frac{x}{l} \right]$$

$$f = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I} \rightarrow x = \frac{l}{2}$$

II.3.5 Torsion¹⁹

$$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot I_T} \dots \text{spezifischer Drehwinkel}$$

$$\varphi_T = \vartheta \cdot l = \frac{M_T \cdot l}{G \cdot I_T} \dots \text{Verdrehung}$$

II.3.5.1 Stäbe mit Kreisquerschnitt

$$\tau_{\max} = \frac{M_T \cdot 32}{\pi \cdot d^3}$$

II.3.5.2 Rechtecksquerschnitt

$$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot \eta_1 \cdot b^3 \cdot h}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{\eta_2 \cdot b^2 \cdot h}$$

II.3.5.3 Dünnwandige Walzprofile

$$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot I_T}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_T \cdot b_{\max}}{I_T}$$

$$I_T = \frac{\eta_3}{3} \cdot \sum b_i^3 \cdot h_i$$

II.3.5.4 Dünnwandige Hohlquerschnitte

rundes Rohr:

$$\vartheta = \frac{M_T}{2 \cdot \pi \cdot G \cdot r_m^3 \cdot t}$$

$$\tau = \frac{M_T}{2 \cdot \pi \cdot r_m^2 \cdot t}$$

Allgemein: (Bredt'sche Formel)

$$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot \oint \frac{ds}{b(s)}} \quad \tau = \frac{M_T}{2 \cdot t \cdot A_m}$$

II.3.5.5 Dünnwandiger Kastenquerschnitt

Allgemein:

$$\vartheta = \frac{M_T}{2 \cdot G \cdot s_1^2 \cdot s_2^2} \left(\frac{s_1}{t_1} + \frac{s_2}{t_2} \right)$$

$$\tau_i = \frac{M_T}{2 \cdot t_i \cdot s_1 \cdot s_2}$$

Quadrat:

$$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot (a-t)^3 \cdot t}$$

$$\tau = \frac{M_T}{2 \cdot t \cdot (a-t)^2}$$

I.7.4 Kraftgrößenmethode

Die Kraftgrößenmethode erlaubt eine umfassende Ermittlung der Auflager- und Schnittgrößen eines statisch unbestimmten Systems.

Das statisch bestimmte Grundsystem wird erhalten durch Lösen von n Bindungen (z.B. Lösen einer Auflagerreaktion, Einführen eines Gelenks) und Wahl von n statisch Unbestimmten $X_1, X_2, \dots, X_n$ (Kraftgrößen).

Im statisch unbestimmten System sind die statisch unbestimmten Größen X_i von null verschieden und die Verschiebungen und Verdrehungen δ_{ik} ihrer Angriffspunkte gleich null.

Im zugehörigen Grundsystem sind die statisch unbestimmten Größen gleich null und die Verschiebungen und Verdrehungen ihrer Angriffspunkte von null verschieden.

einfach statisch unbestimmt: $\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0$

mehrfach statisch unbestimmt:

$$\begin{aligned} \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + \dots + X_n \cdot \delta_{1n} &= 0 \\ \delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + \dots + X_n \cdot \delta_{2n} &= 0 \\ \delta_{30} + X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + \dots + X_n \cdot \delta_{3n} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{n0} + X_1 \cdot \delta_{n1} + X_2 \cdot \delta_{n2} + X_3 \cdot \delta_{n3} + \dots + X_n \cdot \delta_{nn} &= 0 \end{aligned}$$

in Matrizenform:

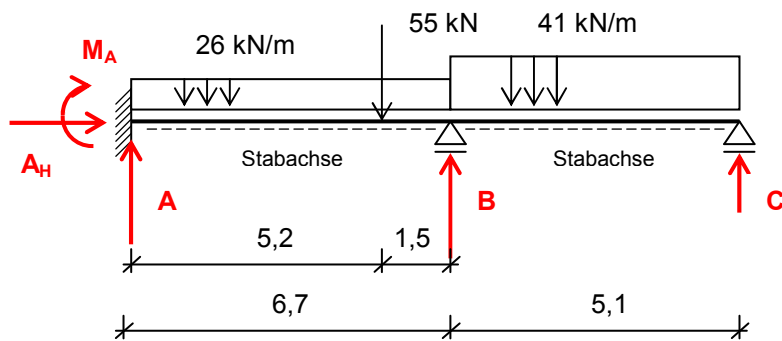
$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{2n} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \dots & \delta_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \\ \dots \\ \delta_{n0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

der erste Index gibt immer den Ort, an dem die Größe wirkt, und der zweite Index die Ursache an.

Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\delta_{ik} = \frac{1}{E \cdot J_c} \cdot \left(\frac{J_c}{J} \cdot \int_l M_i \cdot M_k \cdot dx + \frac{J_c}{A} \cdot \int_l N_i \cdot N_k \cdot dx + \frac{\kappa \cdot J_c}{G \cdot A} \cdot \int_l Q_i \cdot Q_k \cdot dx \right)$$

Beispiel:



Statisch bestimmtes Grundsystem „0“

Feld 1

$$\Sigma H = 0$$

$$A_{0H} = 0$$

$$\Sigma V = 0$$

$$A_{0qV} = q \cdot l / 2 = 26 \cdot 6,7 / 2 = 87,10 \text{ kN}$$

$$B_{0ql} = q \cdot l / 2 = 26 \cdot 6,7 / 2 = 87,10 \text{ kN}$$

$$A_{0FV} = F \cdot b / l = 55 \cdot 1,5 / 6,7 = 12,3134 \text{ kN}$$

$$B_{0Fl} = F \cdot a / l = 55 \cdot 5,2 / 6,7 = 42,6866 \text{ kN}$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_{0q} = q \cdot l^2 / 8 = 26 \cdot 6,7^2 / 8 = 145,8925 \text{ kNm}$$

$$M_{0F} = F \cdot a \cdot b / l = 55 \cdot 5,2 \cdot 1,5 / 6,7 = 64,0299 \text{ kNm}$$

Feld 2

$$\Sigma H = 0$$

$$A_{0H} = 0$$

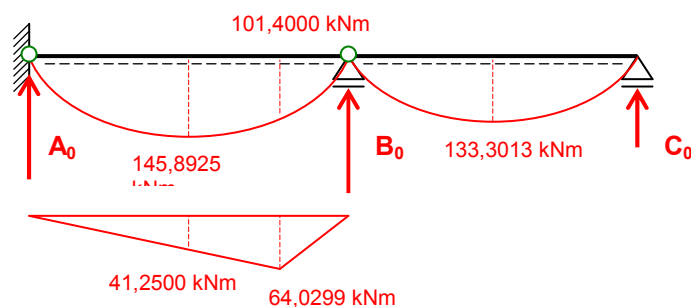
$$\Sigma V = 0$$

$$B_{0qr} = q \cdot l / 2 = 41 \cdot 5,1 / 2 = 104,55 \text{ kN}$$

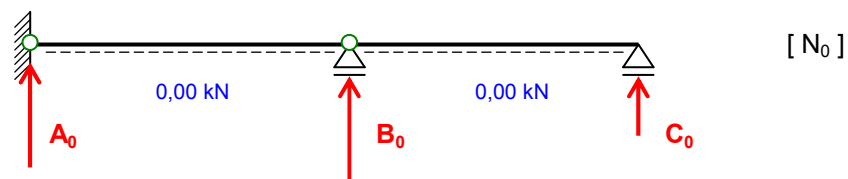
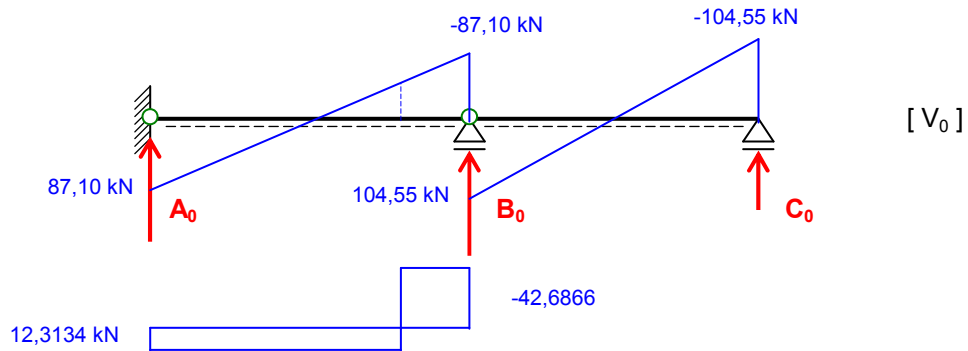
$$C_{0ql} = q \cdot l / 2 = 41 \cdot 5,1 / 2 = 104,55 \text{ kN}$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_{0q} = q \cdot l^2 / 8 = 41 \cdot 5,1^2 / 8 = 133,3013 \text{ kNm}$$



[M_0]



Statisch bestimmtes System „1“

Feld 1

$$\Sigma H = 0$$

$$A_{1H} = 0$$

$$\Sigma V = 0$$

$$A_{1MV} = -M_1/l = -1 / 6,7 = -0,14925 \text{ kN}$$

$$B_{1MI} = M_1/l = 1 / 6,7 = 0,14925 \text{ kN}$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_{1M} = M_1 = 1,00 \text{ kNm}$$

Feld 2

$$\Sigma H = 0$$

$$A_{1H} = 0$$

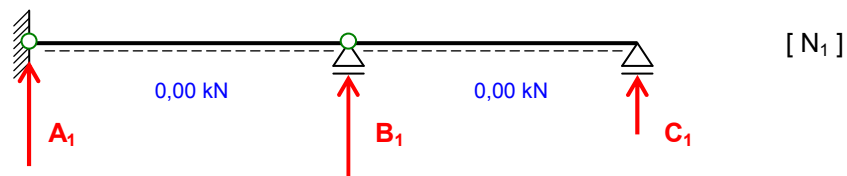
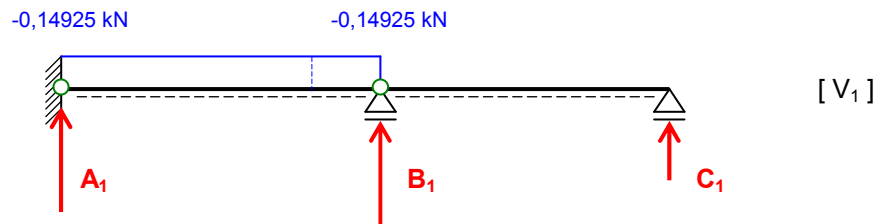
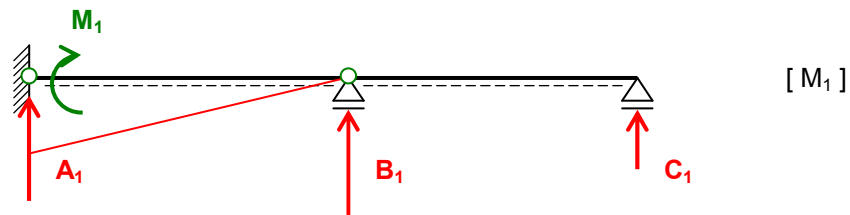
$$\Sigma V = 0$$

$$B_{1Mr} = 0,00 \text{ kN}$$

$$C_{1MI} = 0,00 \text{ kN}$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_{1M} = 0,00 \text{ kNm}$$



Statisch bestimmtes System „2“

Feld 1

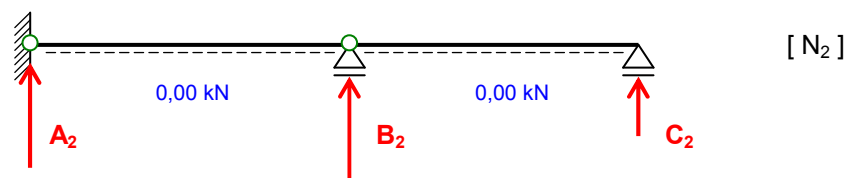
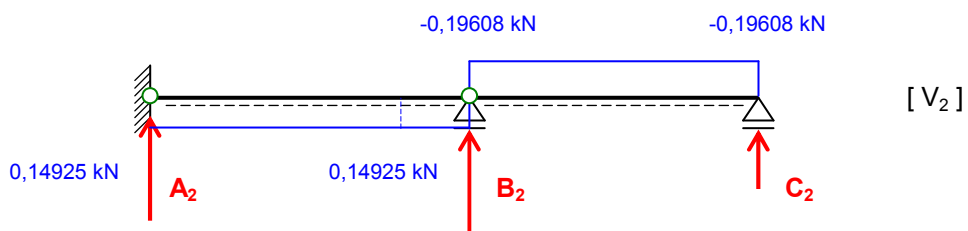
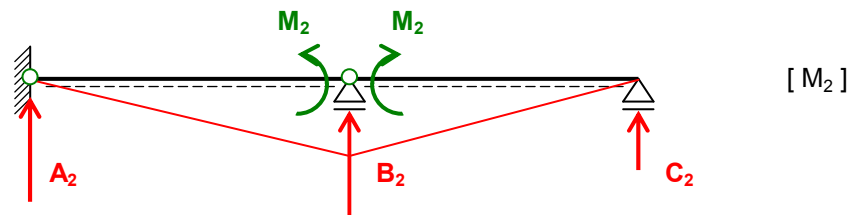
$$\begin{aligned}\Sigma H &= 0 \\ A_{2H} &= 0 \\ \Sigma V &= 0 \\ A_{2MV} &= M_2/l = -1 / 6,7 = 0,14925 \text{ kN} \\ B_{2MI} &= -M_2/l = 1 / 6,7 = -0,14925 \text{ kN} \\ \Sigma M &= 0 \\ M_{2M} &= M_2 = 1,00 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Feld 2

$$\begin{aligned}\Sigma H &= 0 \\ A_{2H} &= 0 \\ \Sigma V &= 0 \\ B_{2Mr} &= -M_2/l = -1 / 5,1 = -0,19608 \text{ kN} \\ C_{2MI} &= M_2/l = -1 / 5,1 = 0,19608 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_{2M} = M_2 = 1,00 \text{ kNm}$$



Berechnung der statisch Unbestimmten „ X_1 “ und „ X_2 “

$$EI/EA = 13670 / 97,3 \cdot 10^{-4} = 0,0140493 \text{ m}^2$$

$$EI/GA_V = 20600 \cdot 13670 / (8000 \cdot 0,7485 \cdot 97,3) \cdot 10^{-4} = 0,0483327 \text{ m}^2$$

$$\delta_{11} = 1/EI \cdot (1/3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6,7 + EI/EA \cdot 0 + EI/GA_V \cdot (-0,14925)^2 \cdot 6,7) = 2,240547 \cdot 1/EI$$

$$\delta_{12} = 1/EI \cdot (1/6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6,7 + EI/EA \cdot 0 + EI/GA_V \cdot (-0,14925) \cdot 0,14925 \cdot 6,7) =$$

$$1,109453 \cdot 1/EI$$

$$\delta_{22} = 1/EI \cdot (1/3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6,7 + 1/3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5,1 + EI/EA \cdot 0 + EI/GA_V \cdot (-0,14925)^2 \cdot 6,7) =$$

$$3,950024 \cdot 1/EI$$

$$\delta_{10} = 1/EI * (1/3 * 1 * 145,8925 * 6,7 + 1/6 * 1 * 64,0299 * (1 + 0,22388) * 5,1 + EI/EA * 0 + EI/GA_V * (12,3134 * (-0,14925) * 5,2 + (-42,6866) * (-0,14925) * 1,5 + 1/2 * 174,2 * (-0,14925) * 6,7 + (-87,1) * (-0,14925) * 6,7)) = 413,3341 * 1/EI$$

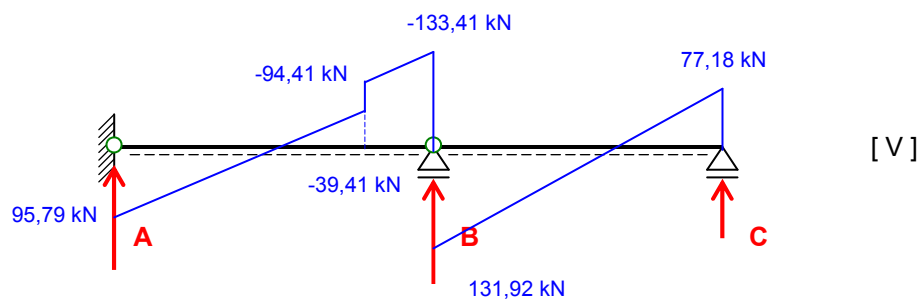
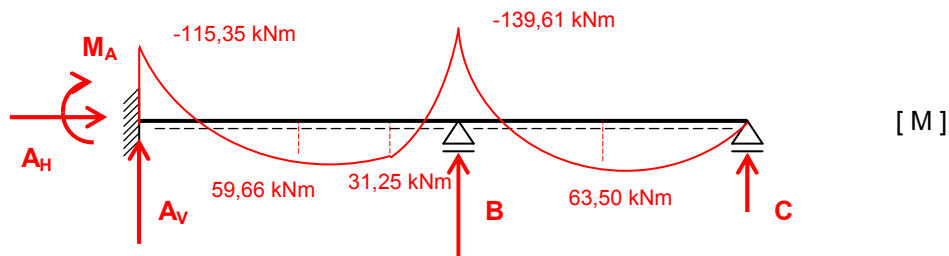
$$\delta_{20} = 1/EI * (1/3 * 1 * 145,8925 * 6,7 + 1/6 * 1 * 64,0299 * (1 + 0,22388) * 5,1 + EI/EA * 0 + EI/GA_V * (12,3134 * 0,14925 * 5,2 + (-42,6866) * 0,14925 * 1,5 + 1/2 * 174,2 * 0,14925 * 6,7 + (-87,1) * 0,14925 * 6,7 + 1/2 * 209,1 * (-0,19608) * 5,1 + (-104,55) * (-0,19608) * 5,1)) = 679,43139 * 1/EI$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{10} + X_1 * \bar{\delta}_{11} + X_2 * \bar{\delta}_{12} &= 0 & X_1 &= -115,34908 \\ \bar{\delta}_{20} + X_1 * \bar{\delta}_{21} + X_2 * \bar{\delta}_{22} &= 0 & X_2 &= -139,60852 \end{aligned}$$

2 – fach statisch unbestimmtes System

$$\begin{aligned} A_{0H} + X_1 * A_{1H} + X_2 * A_{2H} &= 0 \\ A_{0V} + X_1 * A_{1V} + X_2 * A_{2V} &= 99,4134 + (-115,34908) * (-0,14925) * (-139,60852) * 0,14925 = 95,79 \text{ kN} \\ B_0 + X_1 * B_1 + X_2 * B_2 &= 234,3366 + (-115,34908) * 0,14925 * (-139,60852) * (-0,34533) = 265,33 \text{ kN} \\ C_0 + X_1 * C_1 + X_2 * C_2 &= 104,55 + (-115,34908) * 0 * (-139,60852) * 0,19608 = 77,18 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{0A} + X_1 * M_{1A} + X_2 * M_{2A} &= 0 + (-115,34908) * 1 * (-139,60852) * 0 = -115,35 \text{ kNm} \\ M_{0B} + X_1 * M_{1B} + X_2 * M_{2B} &= 0 + (-115,34908) * 0 * (-139,60852) * 1 = -139,61 \text{ kNm} \end{aligned}$$



-
- ¹ *Kurt Hirschfeld:*
Baustatik, Dritte Auflage, Springer-Verlag
siehe Seite 1 ff
- ² *Heinz Parkus:*
Mechanik der festen Körper, Zweite Auflage, Springer-Verlag
siehe Seite 1 ff
- ³ *Robert Krapfenbauer / Ernst Sträussler:*
Bau-Tabellen, Schulbuch
siehe Verzeichnis der österreichischen Baunormen
- ⁴ *Heinz Parkus:*
Mechanik der festen Körper, Zweite Auflage, Springer-Verlag
siehe Seite 28-39
- ⁵ *Heinz Parkus:*
Mechanik der festen Körper, Zweite Auflage, Springer-Verlag
siehe Seite 50
- ⁶ *Alfred Böhm / Reinhold Fritsch:*
Statik 2
siehe Seite 183 ff
- ⁷ *Alfred Böhm / Reinhold Fritsch:*
Statik 3
siehe Seite 19 ff
- ⁸ *Alfred Böhm / Reinhold Fritsch:*
Statik 3
siehe Seite 28 ff
- ⁹ *Kurt Hirschfeld:*
Baustatik, Dritte Auflage, Springer-Verlag
siehe Seite 59 ff
- ¹⁰ *Krätzig Wittek :*
Tragwerke 2
siehe Seite 72 ff
- ¹¹ *Alfred Böhm / Reinhold Fritsch:*
Statik 3
siehe Seite 159 ff
- ¹² *Alfred Böhm / Reinhold Fritsch:*
Statik 3
siehe Seite 214 ff
- ¹³ *Alfred Böhm / Reinhold Fritsch:*
Statik 3
siehe Seite 222 und 238
- ¹⁴ *Alfred Böhm / Reinhold Fritsch:*
Statik 2
siehe Seite 18 ff
- ¹⁵ *Alfred Böhm / Reinhold Fritsch:*
Statik 2
siehe Seite 62 ff
- ¹⁶ *Alfred Böhm / Reinhold Fritsch:*
Statik 2
siehe Seite 67 ff
- ¹⁷ *Alfred Böhm / Reinhold Fritsch:*
Statik 2
siehe Seite 136 ff
- ¹⁸ *Alfred Böhm / Reinhold Fritsch:*
Statik 2
siehe Seite 104 ff
- ¹⁹ *Alfred Böhm / Reinhold Fritsch:*
Statik 3
siehe Seite 41 ff